レポート問題４ (関数方程式第１)　　　　Oct. 17, 2008 (Fri.)

$\boxed{1}$ $I=(0,1)$ を開区間とし，

$$B^m(I) := \{u \in C^m(I)\,;\, |u|_{m,I} < +\infty\} \quad (m = 0,1,2,\dots)$$
$$B^\infty(I) := \{u \in C^\infty(I)\,;\, |u|_{m,I} < +\infty \ \ (\forall m = 0,1,2,\dots)\}$$

と定める．ただし，

$$|u|_{m,I} := \sum_{l=0}^{m} \sup_{0<x<1} |u^{(l)}(x)| \qquad \left(u^{(l)} = \frac{d^l u}{dx^l}\right)$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 任意の $u, v \in B^m(I)$ および $\alpha \in \mathbf{R}$ に対して，

$$|u+v|_{m,I} \le |u|_{m,I} + |v|_{m,I}, \qquad |\alpha u|_{m,I} = |\alpha||u|_{m,I}$$

が成り立つことを示せ．(明らかに $|u|_{m,I} = 0 \Leftrightarrow u = 0$ であるから，これより $B^m(I)$ が $|\cdot|_{m,I}$ をノルムとするノルム空間であること，$B^\infty(I)$ がベクトル空間であることが分かる．)

(2) $B^0(I)$ が $|\cdot|_{0,I}$ をノルムとする Banach 空間であることを示せ．ただし，「連続関数列の一様収束極限は再び連続関数になる」という事実は証明抜きで用いてもよい．

(3) $B^m(I)$ が $|\cdot|_{m,I}$ をノルムとする Banach 空間であることを示せ．

(4) $B^\infty(I)$ が $\{|\cdot|_{m,I}\}_{m=0}^\infty$ をノルムの列とする Fréchet 空間であることを示せ．

レポート作成上の注意

- Ａ４版のレポート用紙を使用し，表紙を付けること．表紙には科目名，レポート番号，学籍番号，氏名を記入すること．
- 最終的な答えだけでなく，途中計算を分かりやすく説明すること．
- ワープロ，ＴＥＸ等は使用せず，手書きで（丁寧な字で）作成すること．
- レポートは次回の講義終了後に回収する．