数論幾何

～幾何学的な直感で問題解く～

未来発見フォーラム2014　2014.10.12
東京国際フォーラム

慶應義塾大学理工学部　坂内健一

自己紹介

ばんない　けんいち

坂内健一　　　　　数学者

慶應義塾大学・理工学部・数理科学科

自己紹介

ばんない　けんいち

坂内健一　　　　数学者

慶應義塾大学・理工学部・数理科学科

数論幾何

数論　整数・有理数などの性質を調べる

幾何　曲線や曲面など、図形を扱う

数論	整数・有理数などの性質を調べる
幾何	曲線や曲面など、図形を扱う
数論幾何	幾何学的な直感を使って、 整数論の問題を解く

今日のお話

数学と抽象化

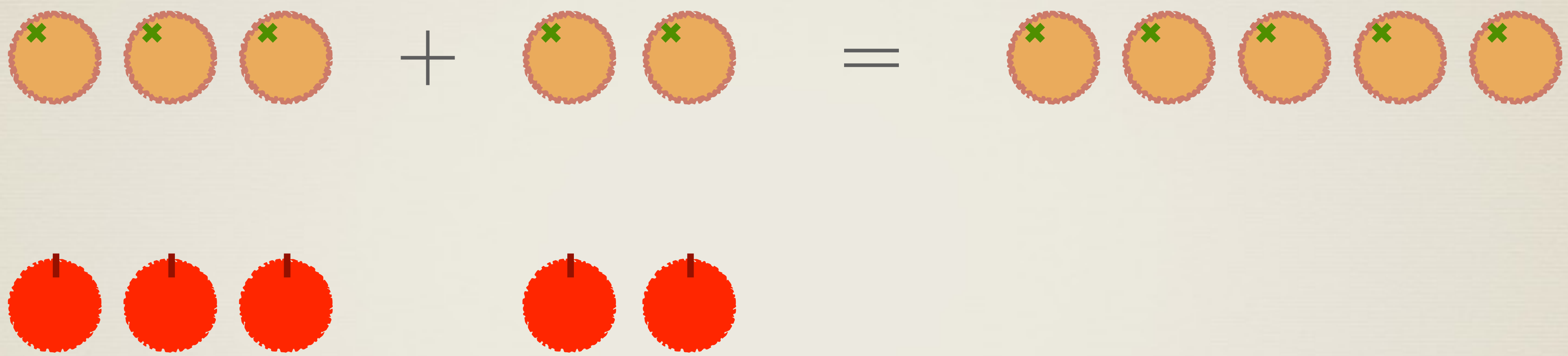
ものの捉え方

数論幾何

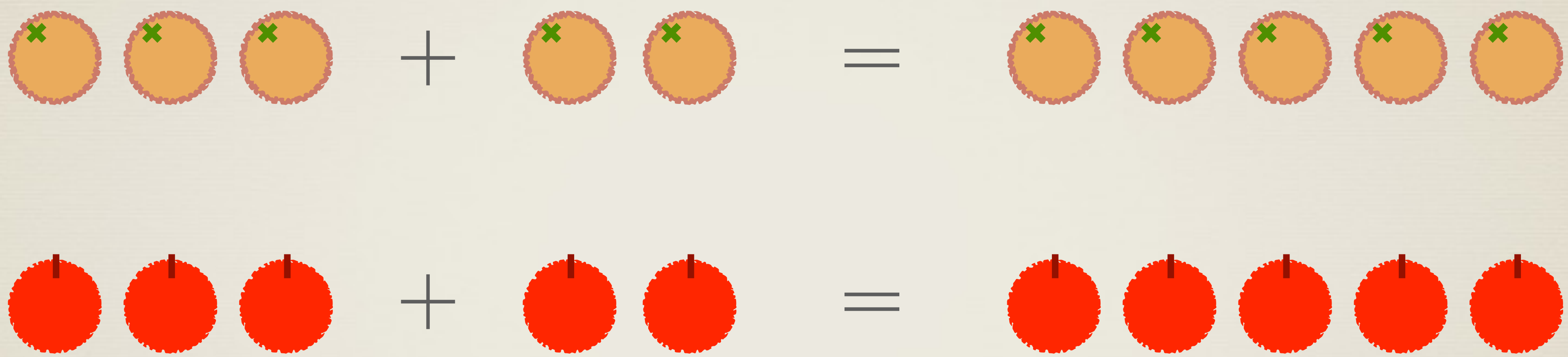
数学と抽象化

数式

数式



数式



数式

数式

$3 \quad + \quad 2 \quad = \quad 5$

数式

$$3 \quad + \quad 2 \quad = \quad 5$$

色々なものを

数えるのに使える！

微分方程式

a: 定数

$$\frac{dy}{dx} = ay$$

微分方程式

a: 定数

$$\frac{dy}{dx} = ay$$

$$\frac{dy}{y} = adx$$

微分方程式

a: 定数

$$\frac{dy}{dx} = ay$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int a dx$$

$$\log y = ax + c$$

微分方程式

a: 定数

$$\frac{dy}{dx} = ay$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int a dx$$

$$\log y = ax + c$$

$$y = Ce^{ax} \qquad (C = e^c)$$

微分方程式

a: 定数

$$\frac{dy}{dx} = ay$$

y の x に対する変化は、
x に比例する。

y：うさぎの個体数

x: 時間

$$\int \frac{dy}{y} = \int a dx$$

$$\log y = ax + c$$

$$y = Ce^{ax} \qquad (C = e^c)$$

微分方程式

a: 定数

$$\frac{dy}{dx} = ay$$

y の x に対する変化は、
x に比例する。

y: 化学物質の量

x: 時間

$$\int \frac{dy}{y} = \int a dx$$

$$\log y = ax + c$$

$$y = Ce^{ax} \qquad (C = e^c)$$

ものの捉え方

式の意味

式の意味

奇数を足す

$$
\begin{aligned}
1 &= \ ? \\
1+3 &= \\
1+3+5 &= \\
1+3+5+7 &= \\
1+3+5+7+9 &= \\
\vdots \qquad & \quad \vdots \\
1+3+5+\cdots+(2n-1) &=
\end{aligned}
$$

式の意味

奇数を足す

$$
\begin{aligned}
1 &= 1^2 \\
1+3 &= \ ? \\
1+3+5 &= \\
1+3+5+7 &= \\
1+3+5+7+9 &= \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
1+3+5+\cdots+(2n-1) &=
\end{aligned}
$$

式の意味

奇数を足す

$$
\begin{aligned}
1 &= 1^2 \\
1+3 &= 2^2 \\
1+3+5 &= \ ? \\
1+3+5+7 &= \\
1+3+5+7+9 &= \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
1+3+5+\cdots+(2n-1) &=
\end{aligned}
$$

式の意味

奇数を足す

$$1 = 1^2$$
$$1 + 3 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = \quad ?$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 =$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) =$$

式の意味

奇数を足す

$$
\begin{aligned}
1 &= 1^2 \\
1+3 &= 2^2 \\
1+3+5 &= 3^2 \\
1+3+5+7 &= 4^2 \\
1+3+5+7+9 &= \ ?\\
\vdots \qquad & \qquad \vdots \\
1+3+5+\cdots+(2n-1) &=
\end{aligned}
$$

式の意味

奇数を足す

$$
\begin{aligned}
1 &= 1^2 \\
1+3 &= 2^2 \\
1+3+5 &= 3^2 \\
1+3+5+7 &= 4^2 \\
1+3+5+7+9 &= 5^2 \\
\vdots \qquad & \quad \vdots \\
1+3+5+\cdots+(2n-1) &= \ ?
\end{aligned}
$$

式の意味

奇数を足す

$$
\begin{aligned}
1 &= 1^2 \\
1+3 &= 2^2 \\
1+3+5 &= 3^2 \\
1+3+5+7 &= 4^2 \\
1+3+5+7+9 &= 5^2 \\
\vdots \qquad & \quad \vdots \\
1+3+5+\cdots+(2n-1) &= n^2
\end{aligned}
$$

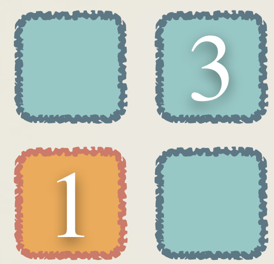
?

式の意味

1

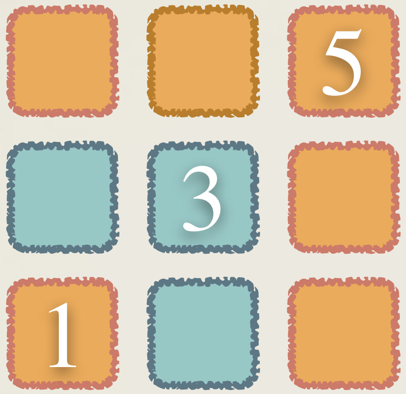
$$1 = 1^2$$

式の意味



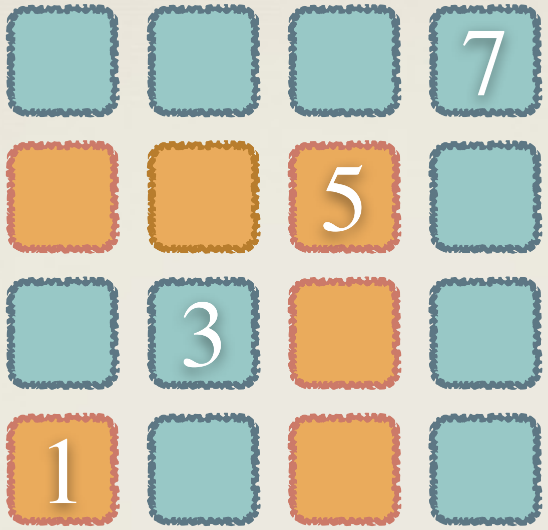
$$1 + 3 = 2^2$$

式の意味



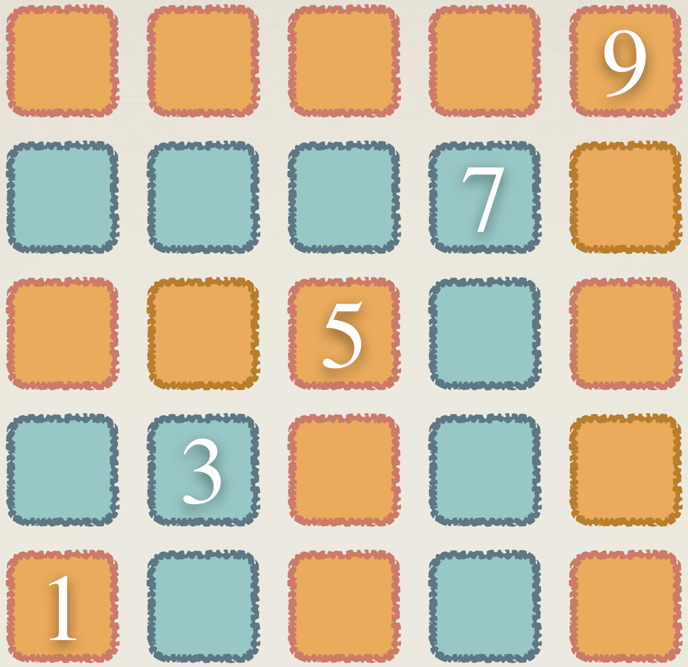
$$1 + 3 + 5 = 3^2$$

式の意味



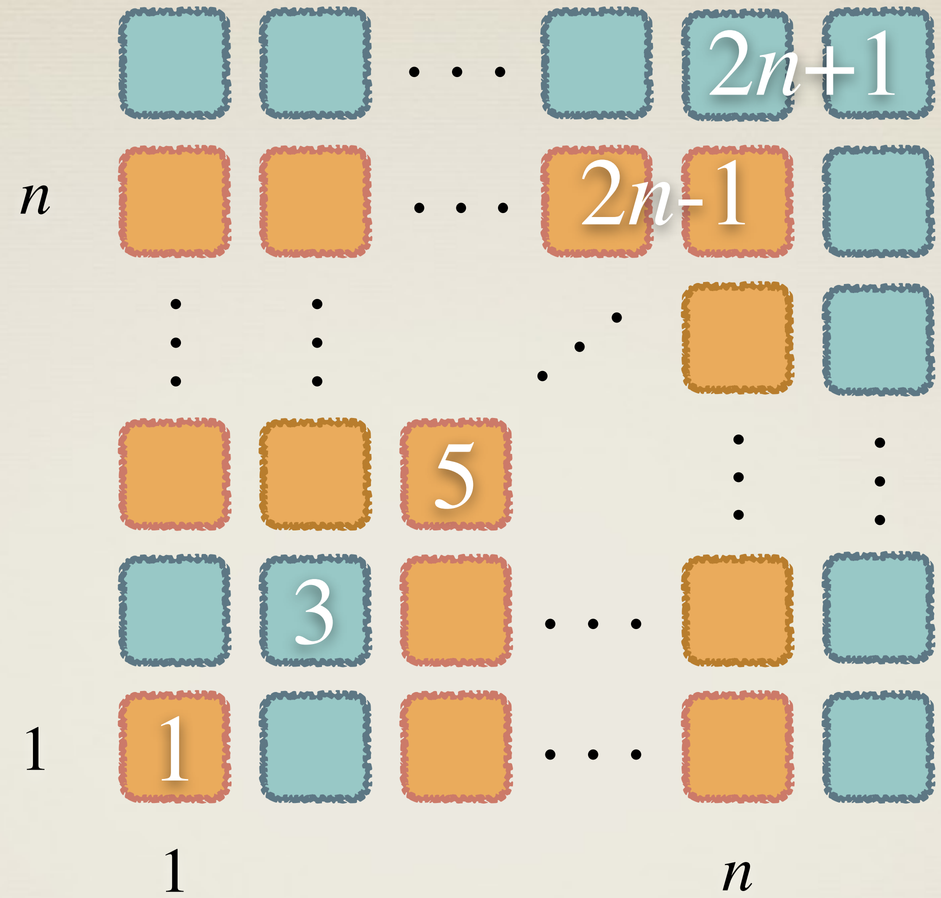
$$1+3+5+7=4^2$$

式の意味



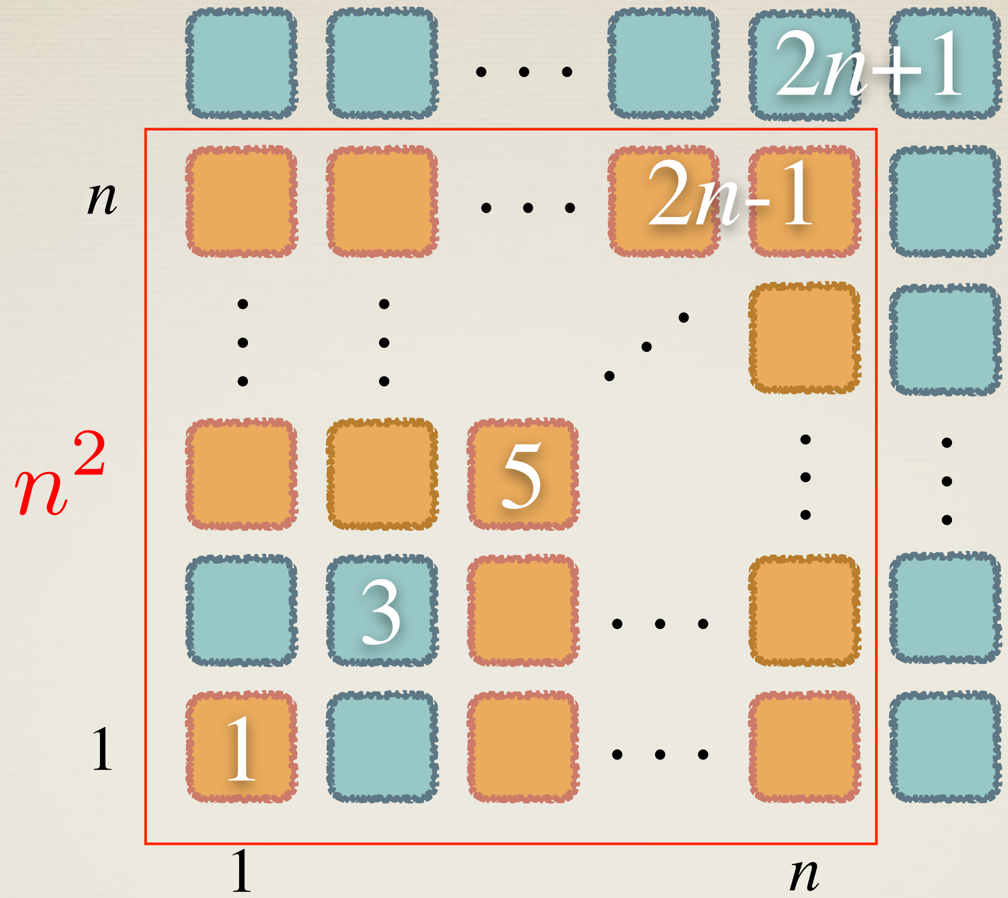
$$1+3+5+7+9=5^2$$

式の意味



$$1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) = ?$$

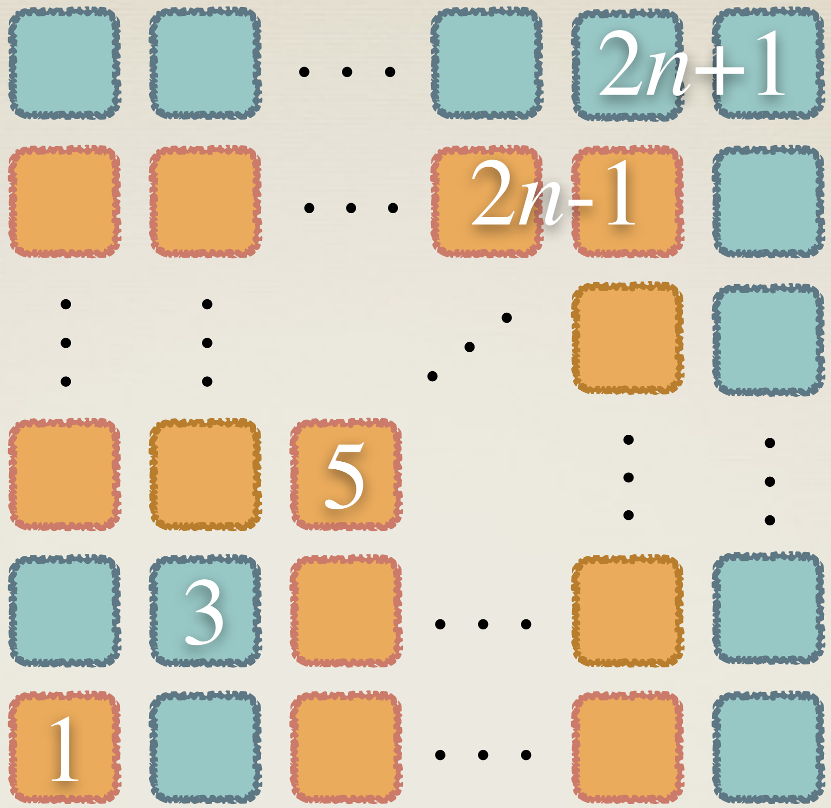
式の意味



$$1+3+\cdots+(2n-1)+(2n+1)=?$$

$$n^2+(2n+1)=?$$

式の意味



$$1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) = (n+1)^2$$

$$n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$$

数論幾何

整数論

整数	$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$	
有理数	$\frac{5}{3}, -\frac{6}{7}, 5, \cdots$	分数
実数	$\frac{1}{2}, \sqrt{2}, \pi, \cdots$	無理数も含む

Dipohantine問題

方程式の整数解や有理数解を求める

Fermat予想

$n \geq 3$: 整数

$$X^n + Y^n = Z^n$$

をみたす整数 X, Y, Z で、

$XYZ \neq 0$ となるものは存在しない。

Fermat予想

$n \geq 3$: 整数

$$X^n + Y^n = Z^n$$

をみたす整数 X, Y, Z で、

$XYZ \neq 0$ となるものは存在しない。

Fermat予想

$n \geq 3$: 整数

$$X^n + Y^n = Z^n$$

をみたす整数 X, Y, Z で、

$XYZ \neq 0$ となるものは存在しない。

$Z \neq 0$

Fermat予想

$n \geq 3$: 整数

$$\left(\frac{X}{Z}\right)^n + \left(\frac{Y}{Z}\right)^n = 1$$

をみたす整数 X, Y, Z で、

$XYZ \neq 0$ となるものは存在しない。

$Z \neq 0$

Fermat予想

$n \geq 3$: 整数

$$\left(\frac{X}{Z}\right)^n + \left(\frac{Y}{Z}\right)^n = 1$$

をみたす整数 X, Y, Z で、

$XYZ \neq 0$ となるものは存在しない。

$Z \neq 0$

$$x = \frac{X}{Z}, y = \frac{Y}{Z}$$

Fermat予想

$n \geq 3$: 整数

$$x^n + y^n = 1$$

をみたす整数 X, Y, Z で、

$XYZ \neq 0$ となるものは存在しない。

$$Z \neq 0$$

$$x = \frac{X}{Z}, y = \frac{Y}{Z}$$

Fermat予想

$n \geq 3$: 整数

$$x^n + y^n = 1$$

をみたす有理数 x, y で、

$XYZ \neq 0$ となるものは存在しない。

$$Z \neq 0$$

$$x = \frac{X}{Z}, y = \frac{Y}{Z}$$

Fermat予想

$n \geq 3$: 整数

$$x^n + y^n = 1$$

をみたす有理数 x, y で、

$xy \neq 0$ となるものは存在しない。

n=2 の場合

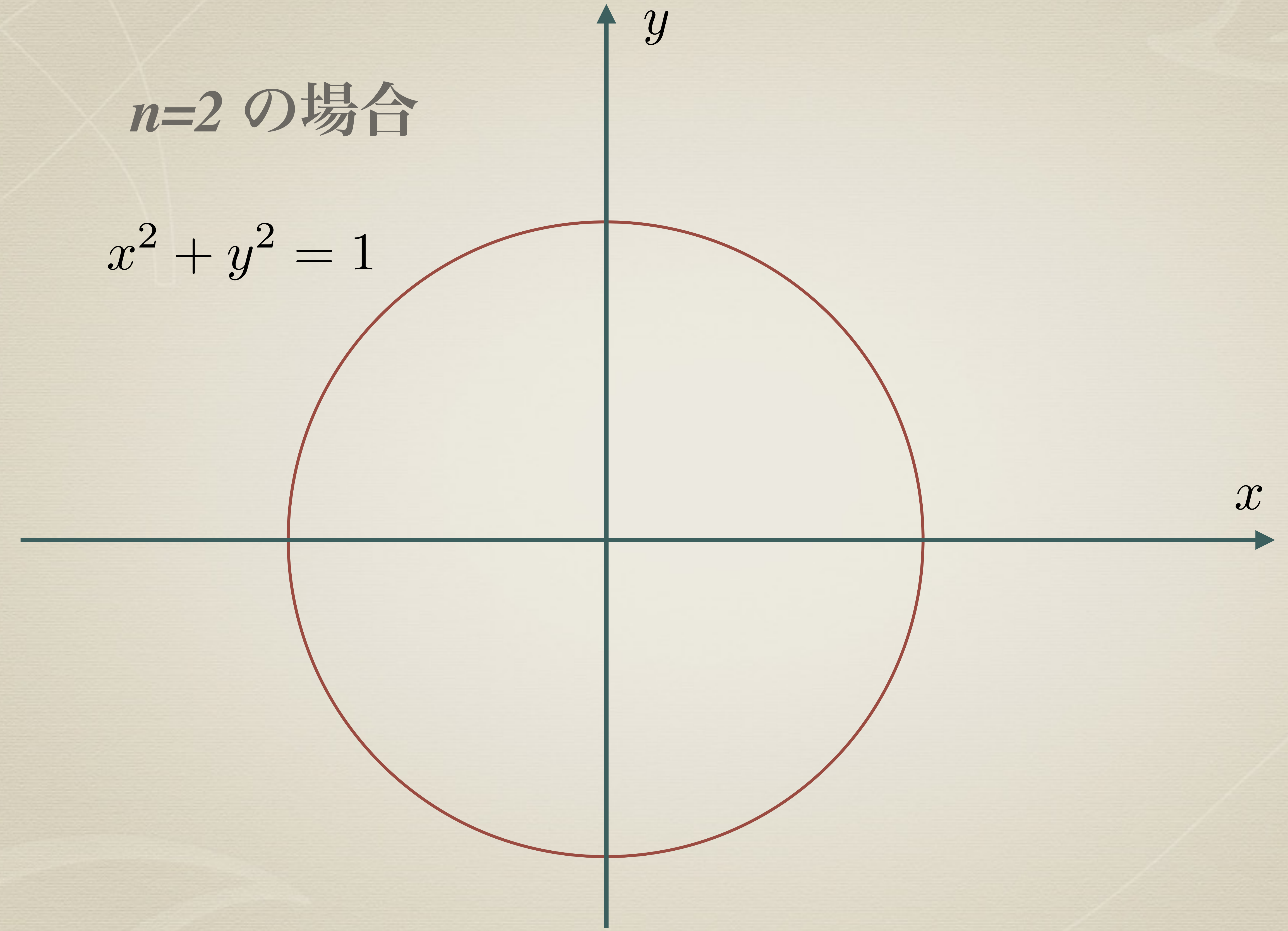
$n=2$：整数

$$x^2 + y^2 = 1$$

をみたす有理数 x, y は、どれだけあるか？

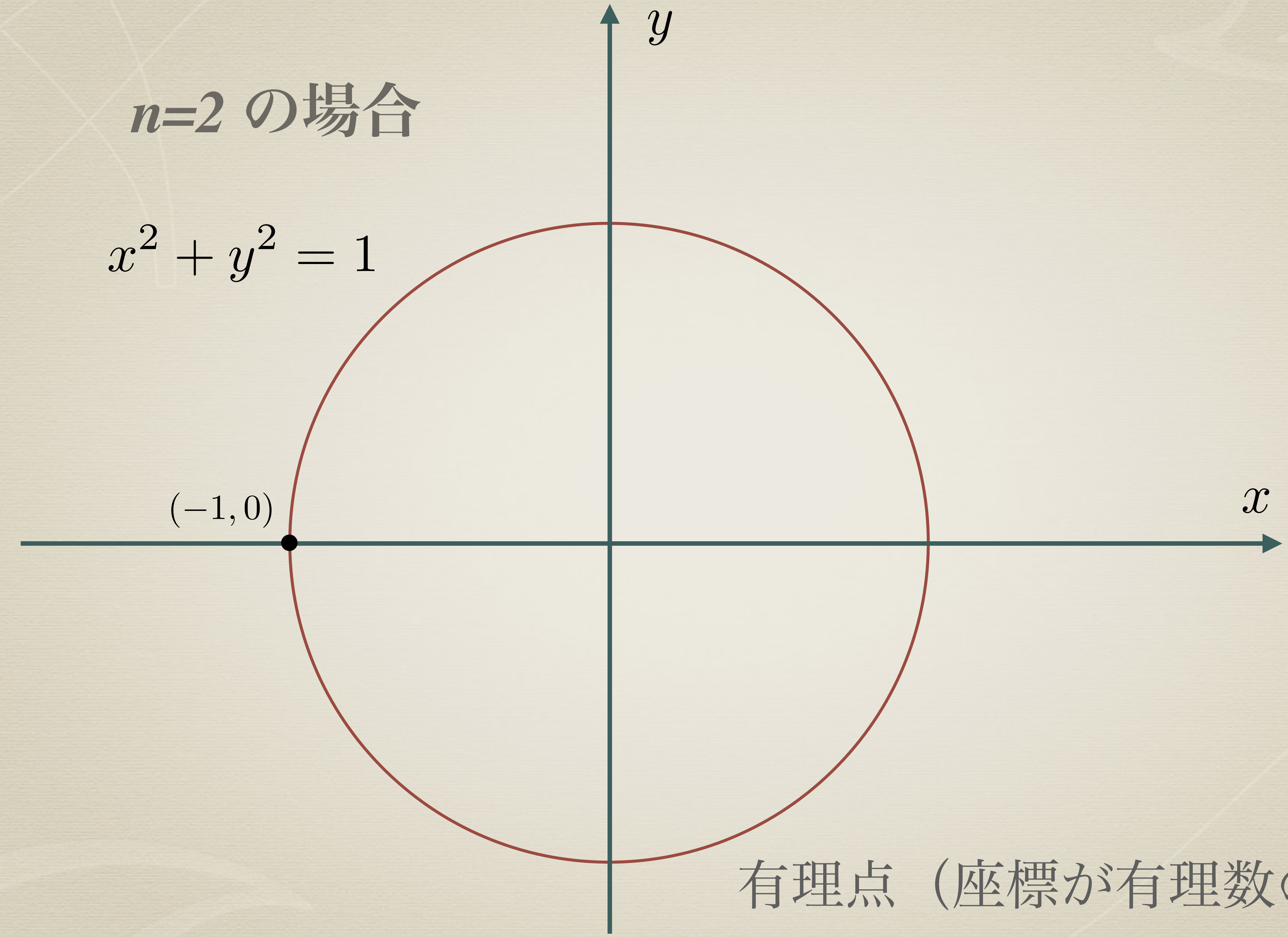
n=2 の場合

$$x^2 + y^2 = 1$$



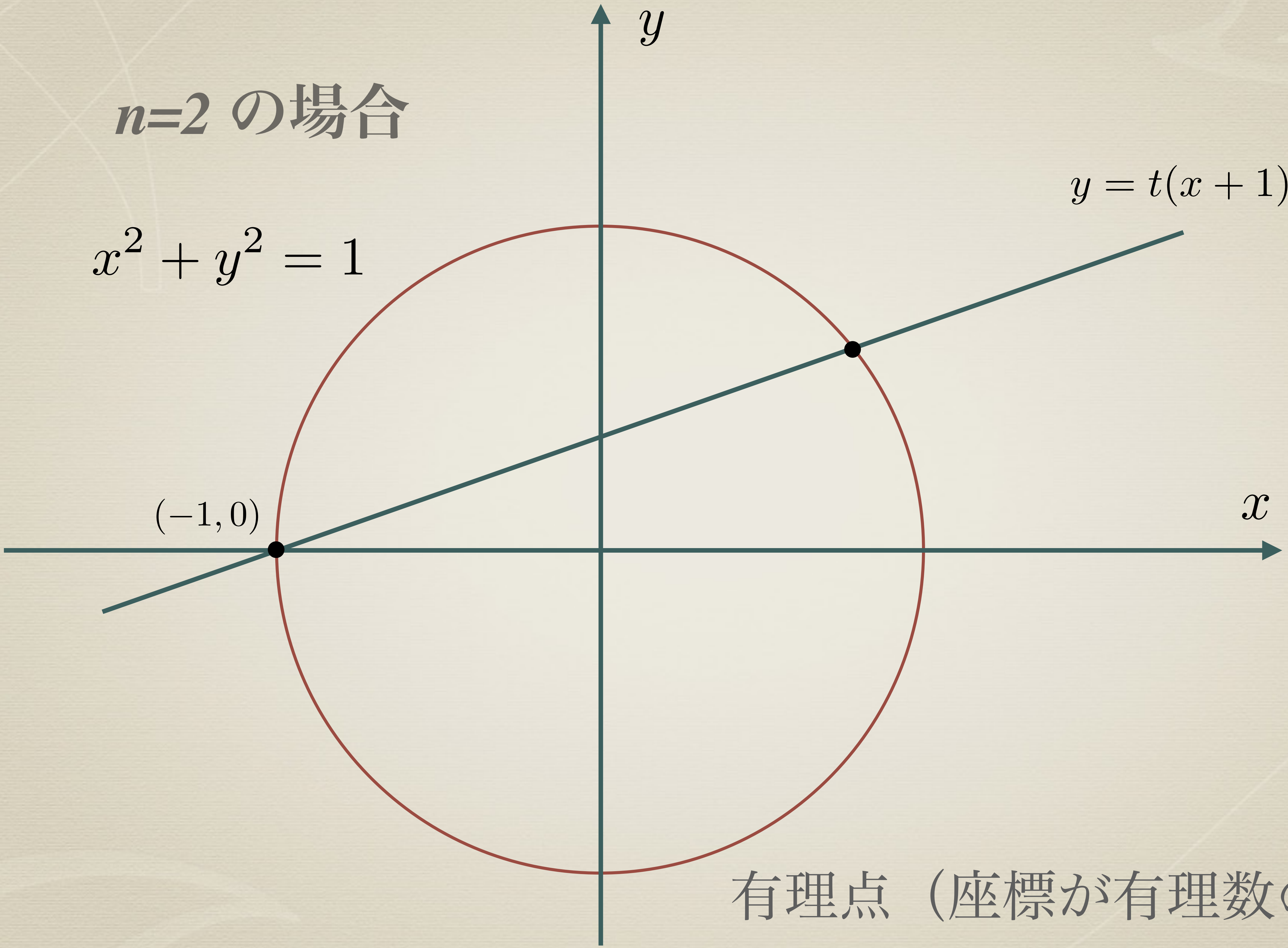
n=2 の場合

$$x^2 + y^2 = 1$$



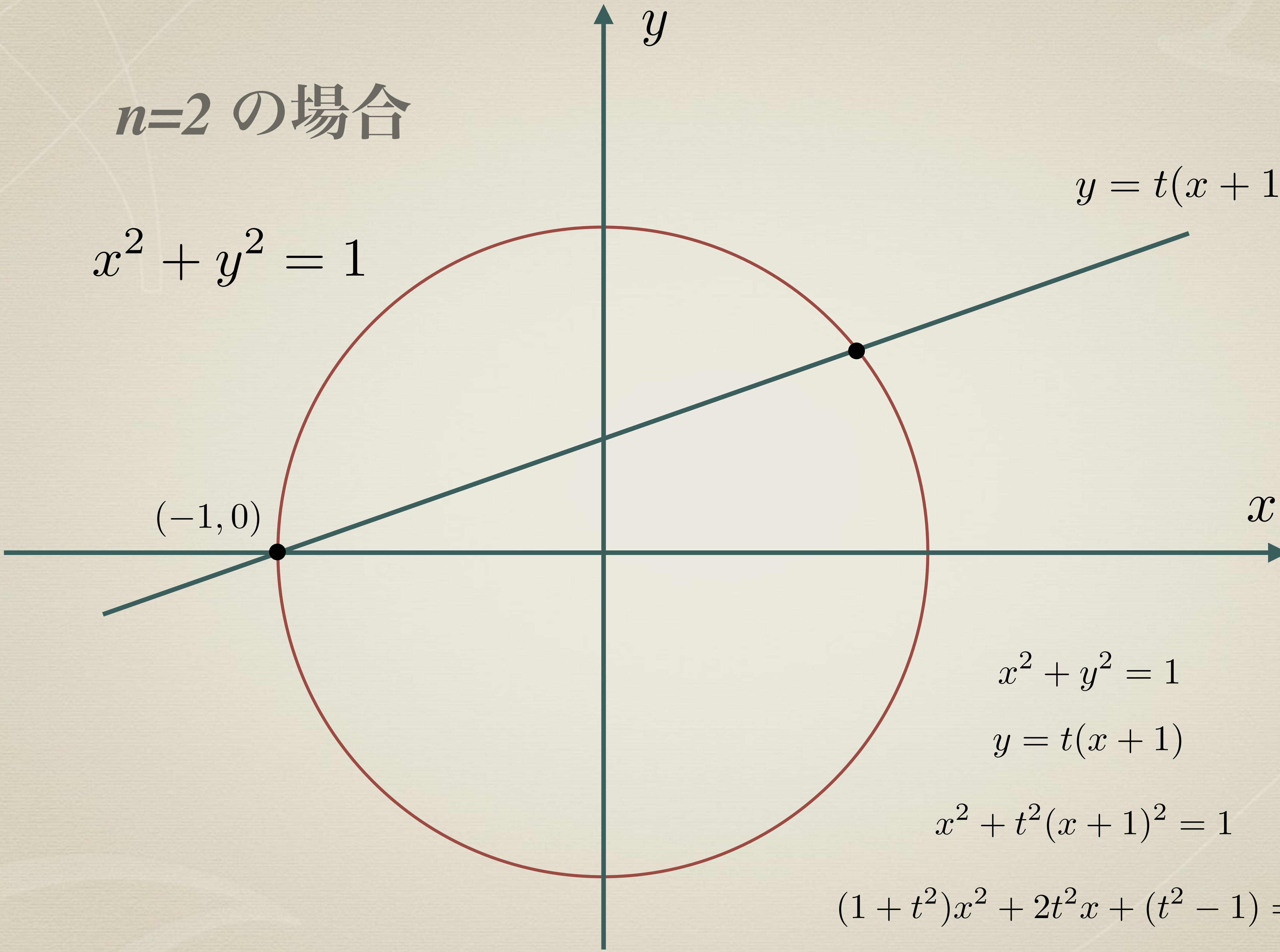
有理点（座標が有理数の点）
はどれだけあるか？

n=2 の場合



有理点（座標が有理数の点）
はどれだけあるか？

n=2 の場合



$$x^2 + y^2 = 1$$

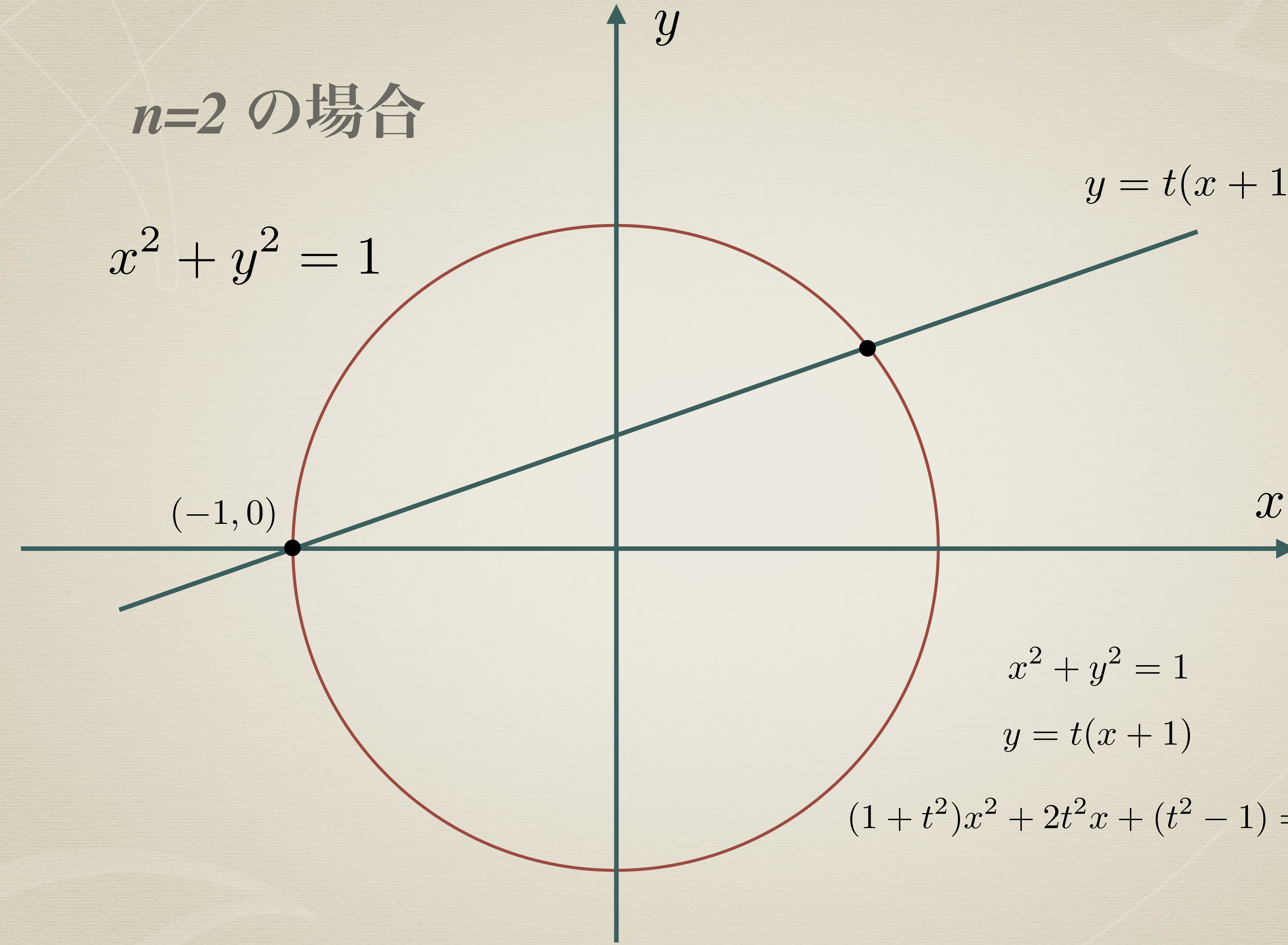
$$y = t(x+1)$$

$$x^2 + t^2(x+1)^2 = 1$$

$$(1+t^2)x^2 + 2t^2x + (t^2-1) = 0$$

n=2 の場合

$$x^2 + y^2 = 1$$



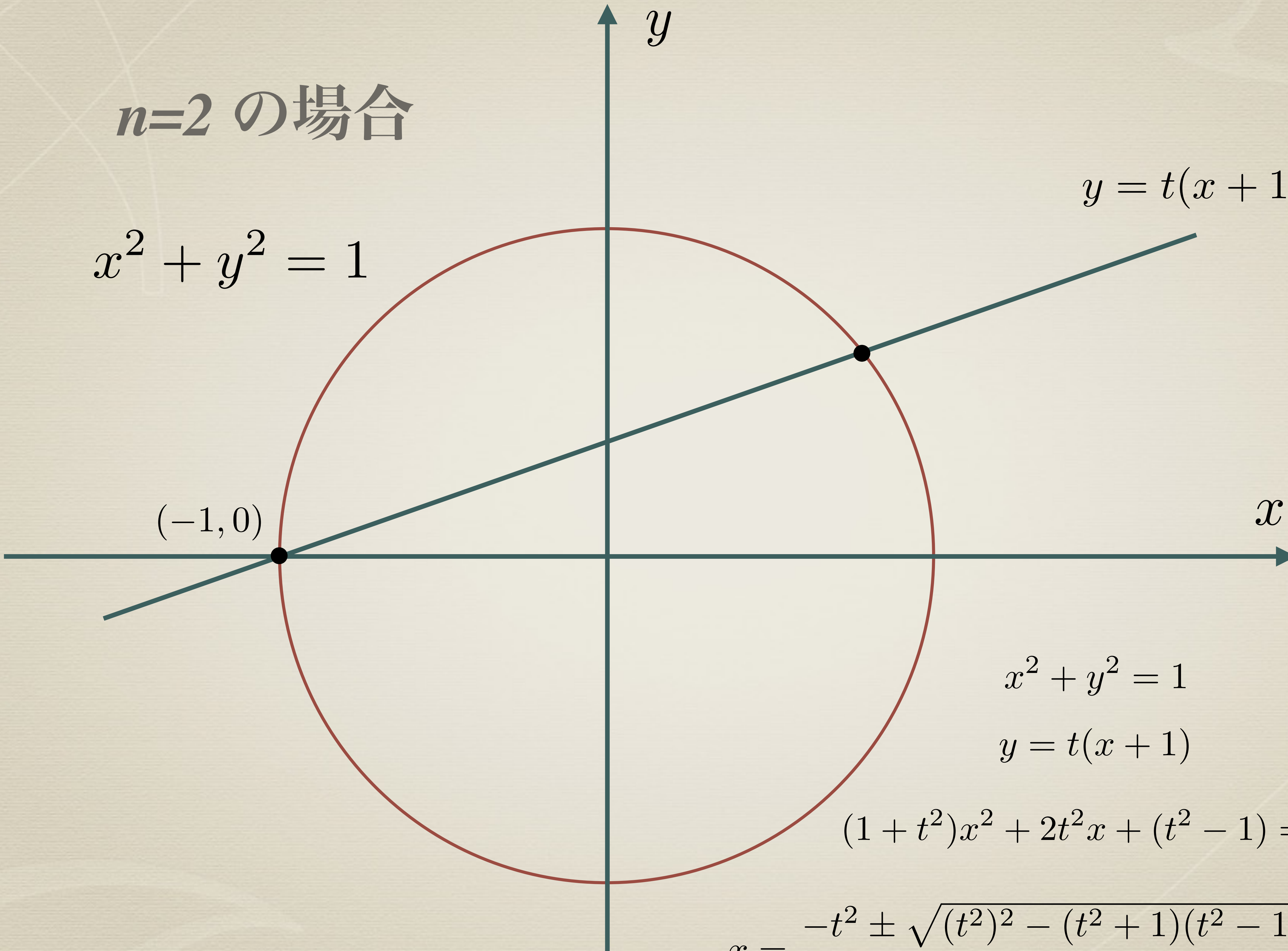
$$x^2 + y^2 = 1$$

$$y = t(x+1)$$

$$(1+t^2)x^2 + 2t^2x + (t^2-1) = 0$$

n=2 の場合

$$x^2 + y^2 = 1$$



$$x^2 + y^2 = 1$$

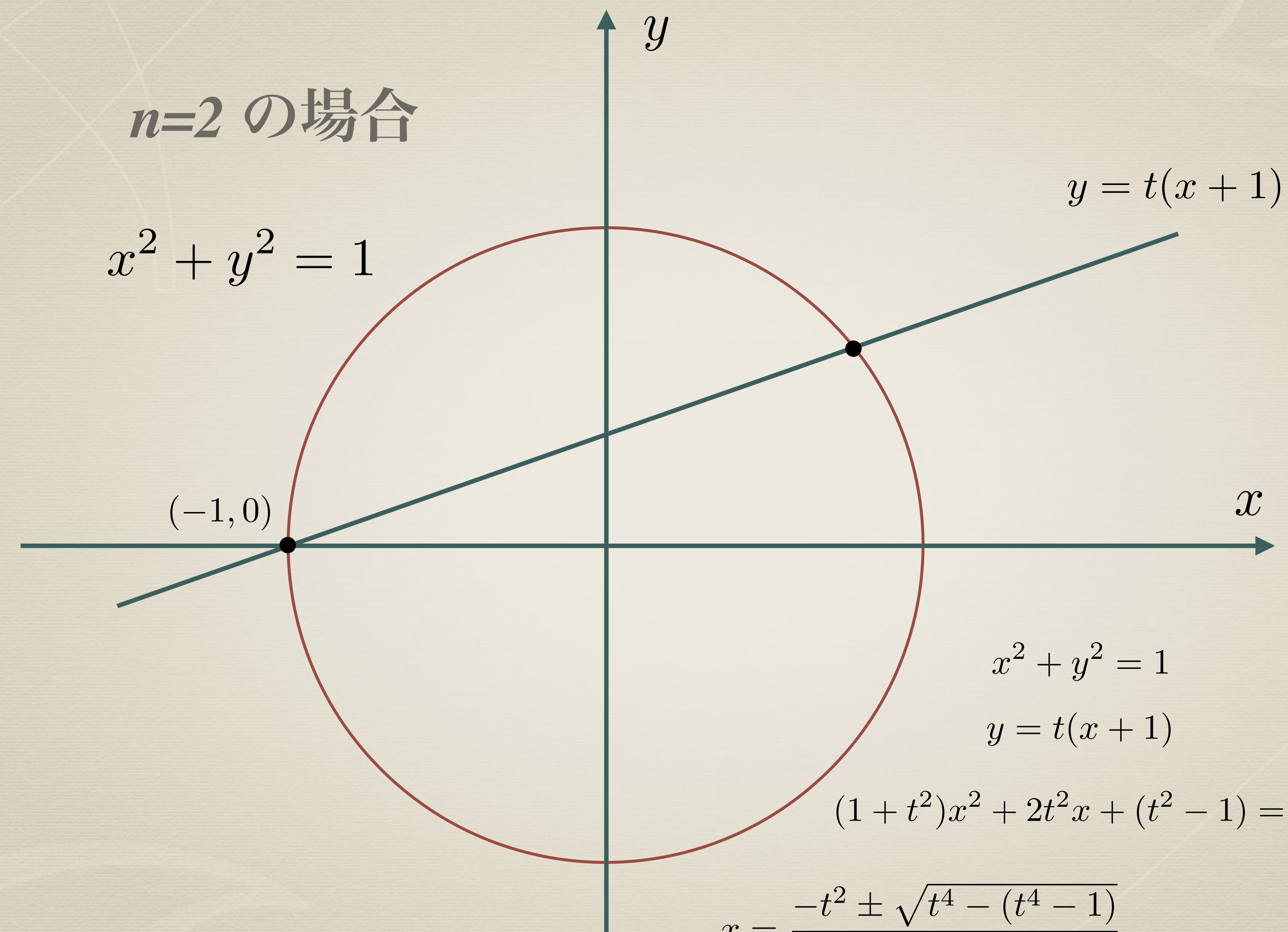
$$y = t(x+1)$$

$$(1+t^2)x^2 + 2t^2 x + (t^2 - 1) = 0$$

$$x = \frac{-t^2 \pm \sqrt{(t^2)^2 - (t^2+1)(t^2-1)}}{1+t^2}$$

n=2 の場合

$$x^2 + y^2 = 1$$



$$x^2 + y^2 = 1$$

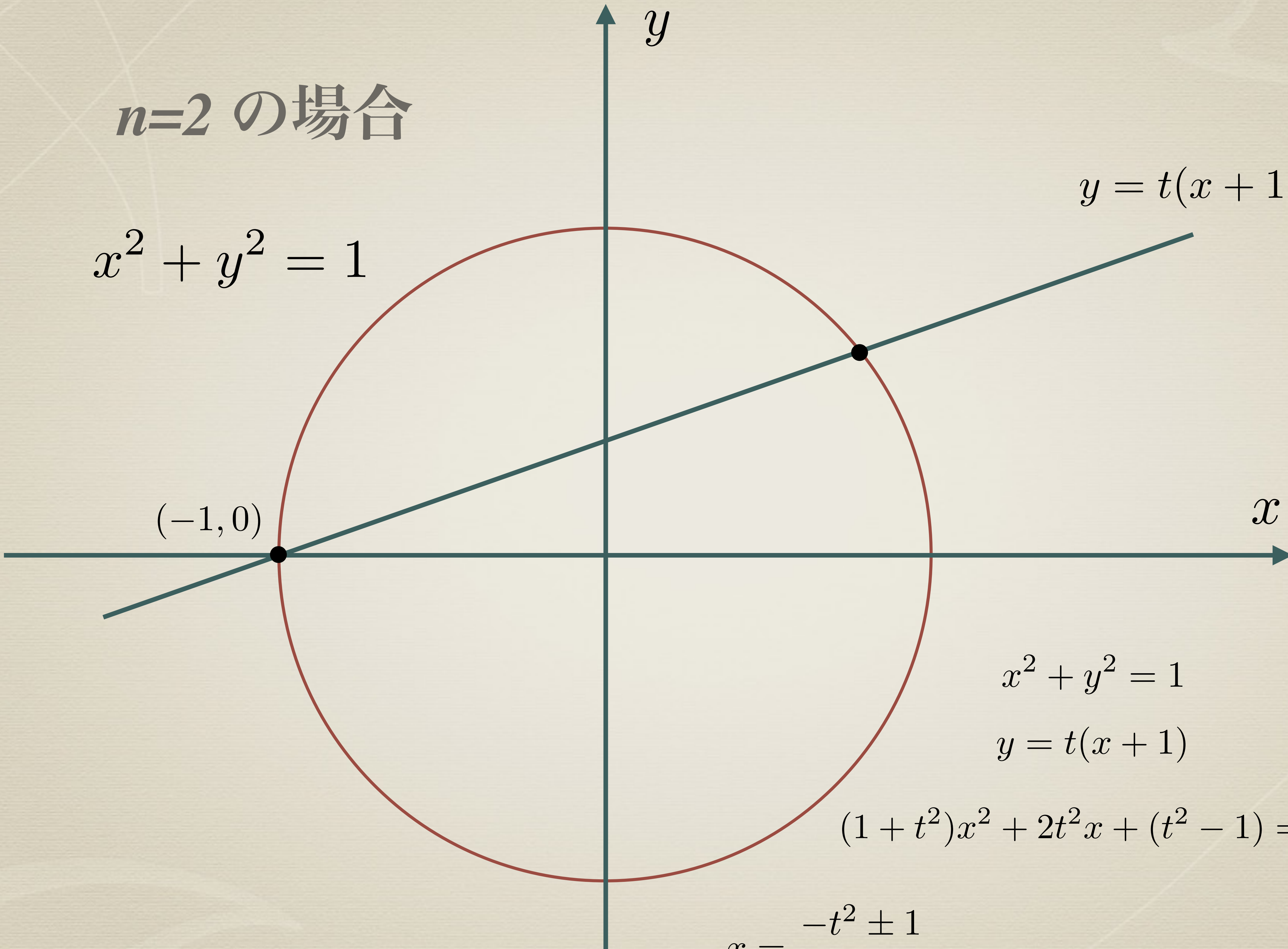
$$y = t(x+1)$$

$$(1+t^2)x^2 + 2t^2 x + (t^2 - 1) = 0$$

$$x = \frac{-t^2 \pm \sqrt{t^4 - (t^4 - 1)}}{1 + t^2}$$

n=2 の場合

$$x^2 + y^2 = 1$$



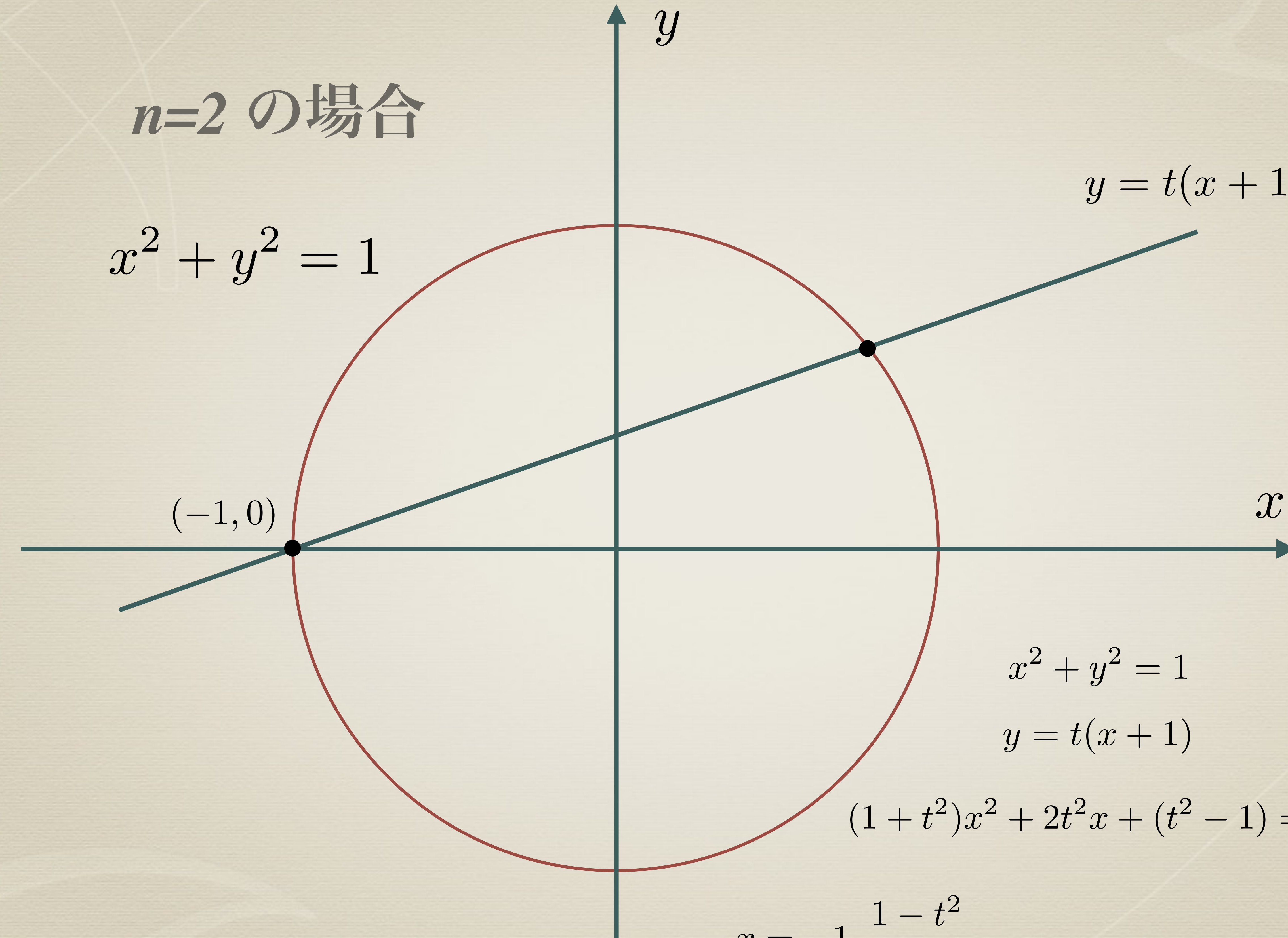
$$x^2 + y^2 = 1$$

$$y = t(x+1)$$

$$(1+t^2)x^2 + 2t^2 x + (t^2 - 1) = 0$$

$$x = \frac{-t^2 \pm 1}{1+t^2}$$

n=2 の場合



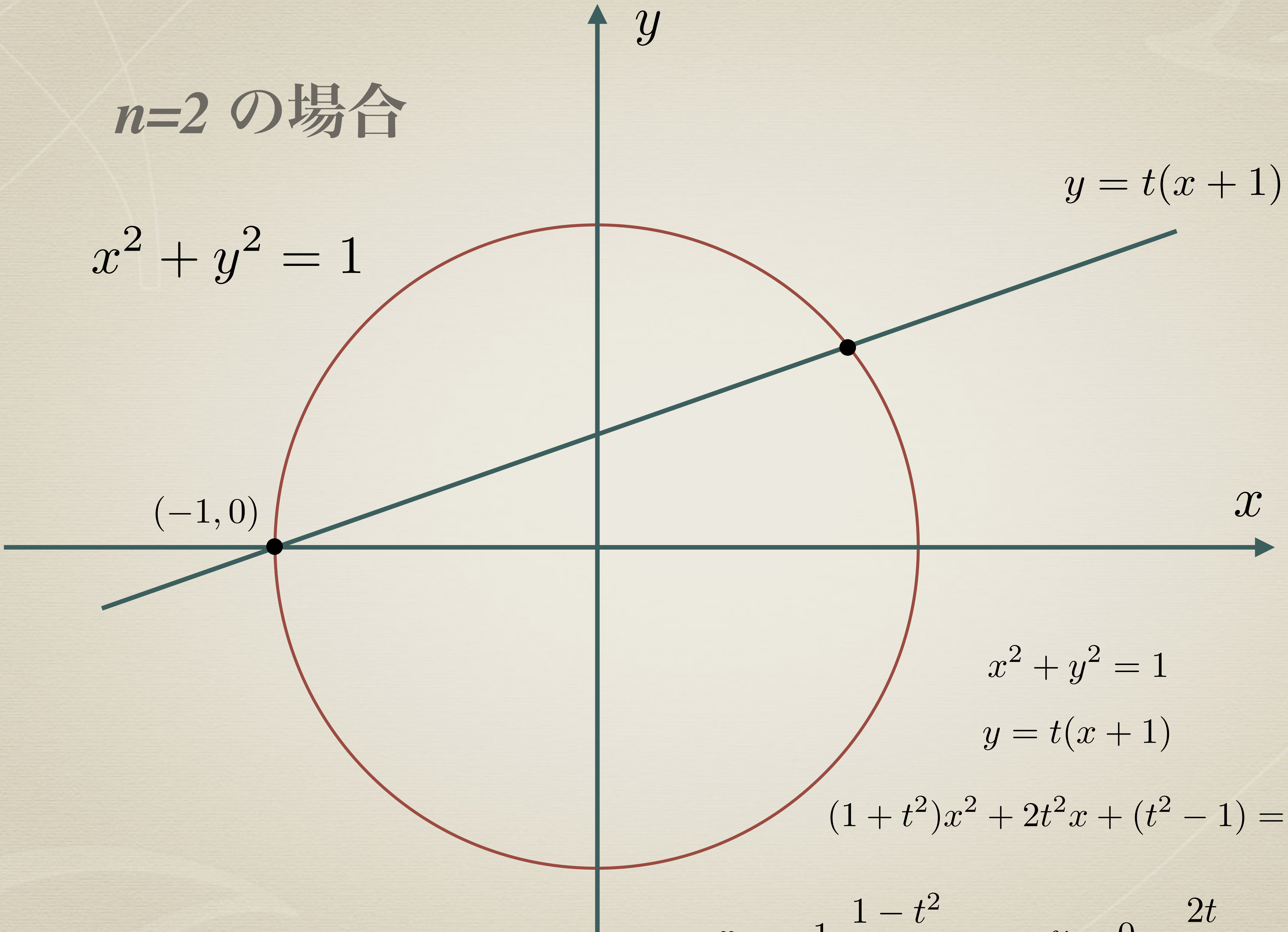
$$x^2 + y^2 = 1$$

$$y = t(x+1)$$

$$(1+t^2)x^2 + 2t^2 x + (t^2 - 1) = 0$$

$$x = -1, \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

n=2 の場合



$$x^2 + y^2 = 1$$

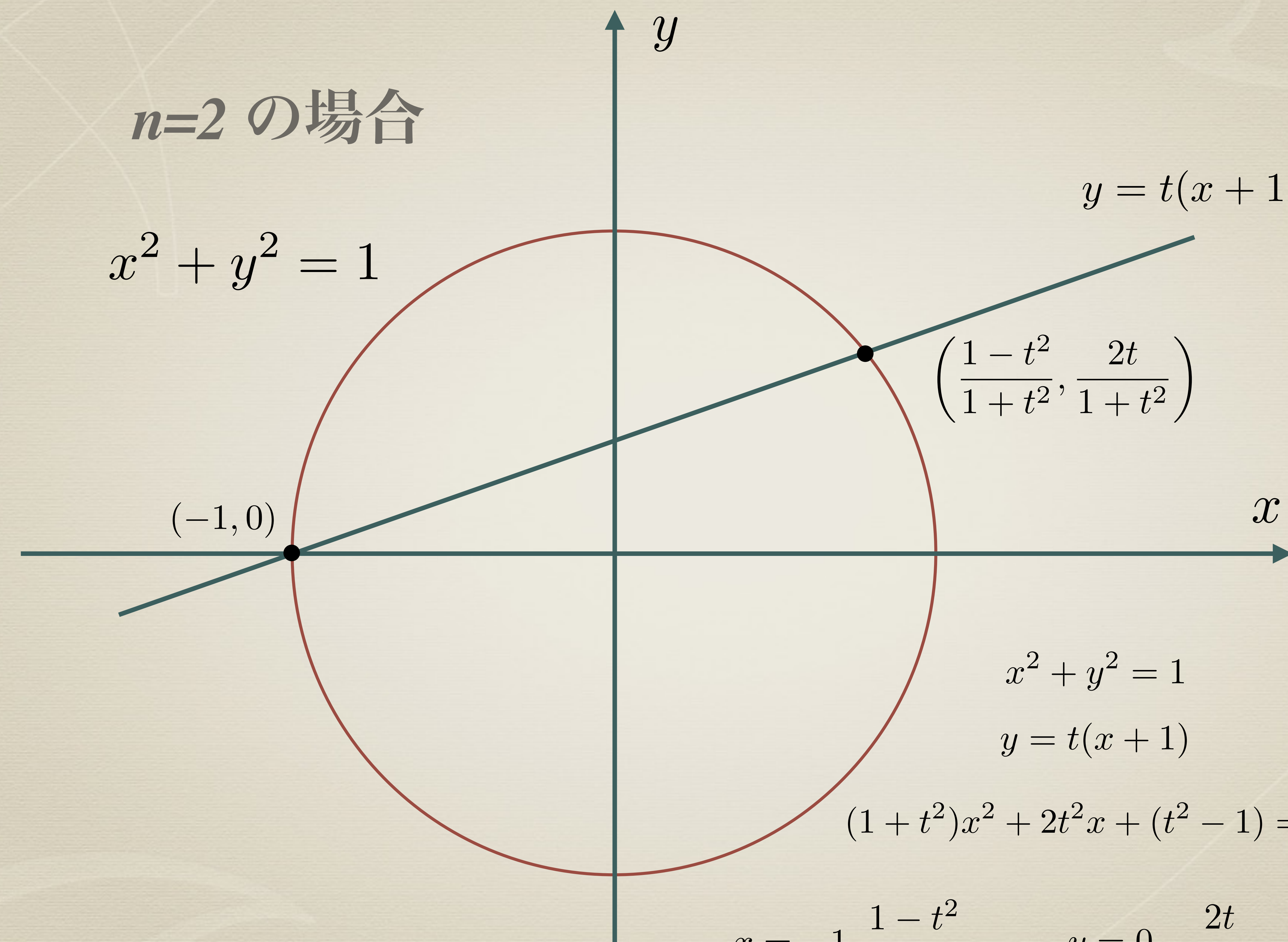
$$y = t(x+1)$$

$$(1+t^2)x^2 + 2t^2x + (t^2-1) = 0$$

$$x = -1, \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad y = 0, \frac{2t}{1+t^2}$$

n=2 の場合

$$x^2 + y^2 = 1$$



$$x^2 + y^2 = 1$$

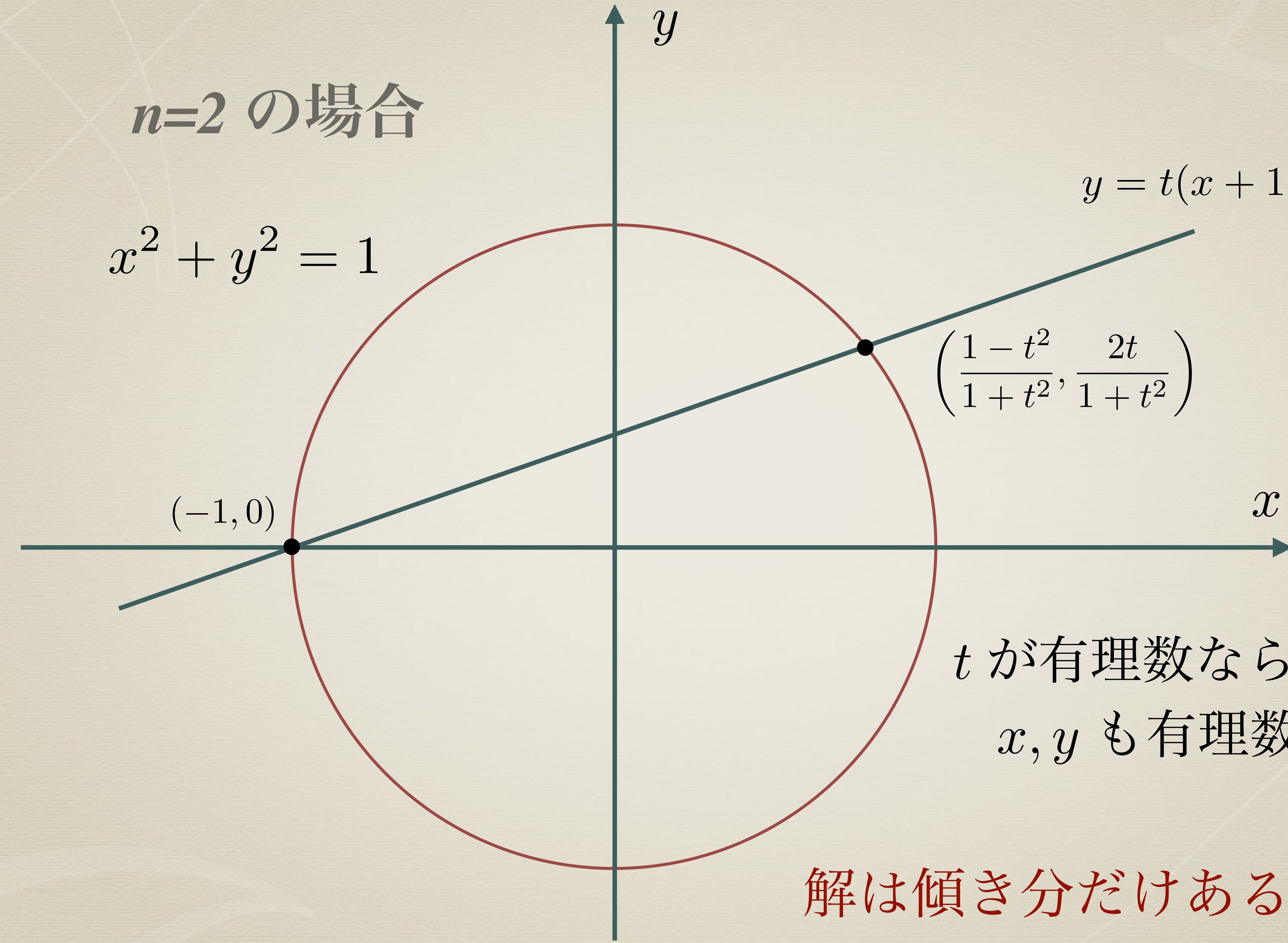
$$y = t(x+1)$$

$$(1+t^2)x^2 + 2t^2 x + (t^2 - 1) = 0$$

$$x = -1, \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad y = 0, \frac{2t}{1+t^2}$$

n=2 の場合

$$x^2 + y^2 = 1$$

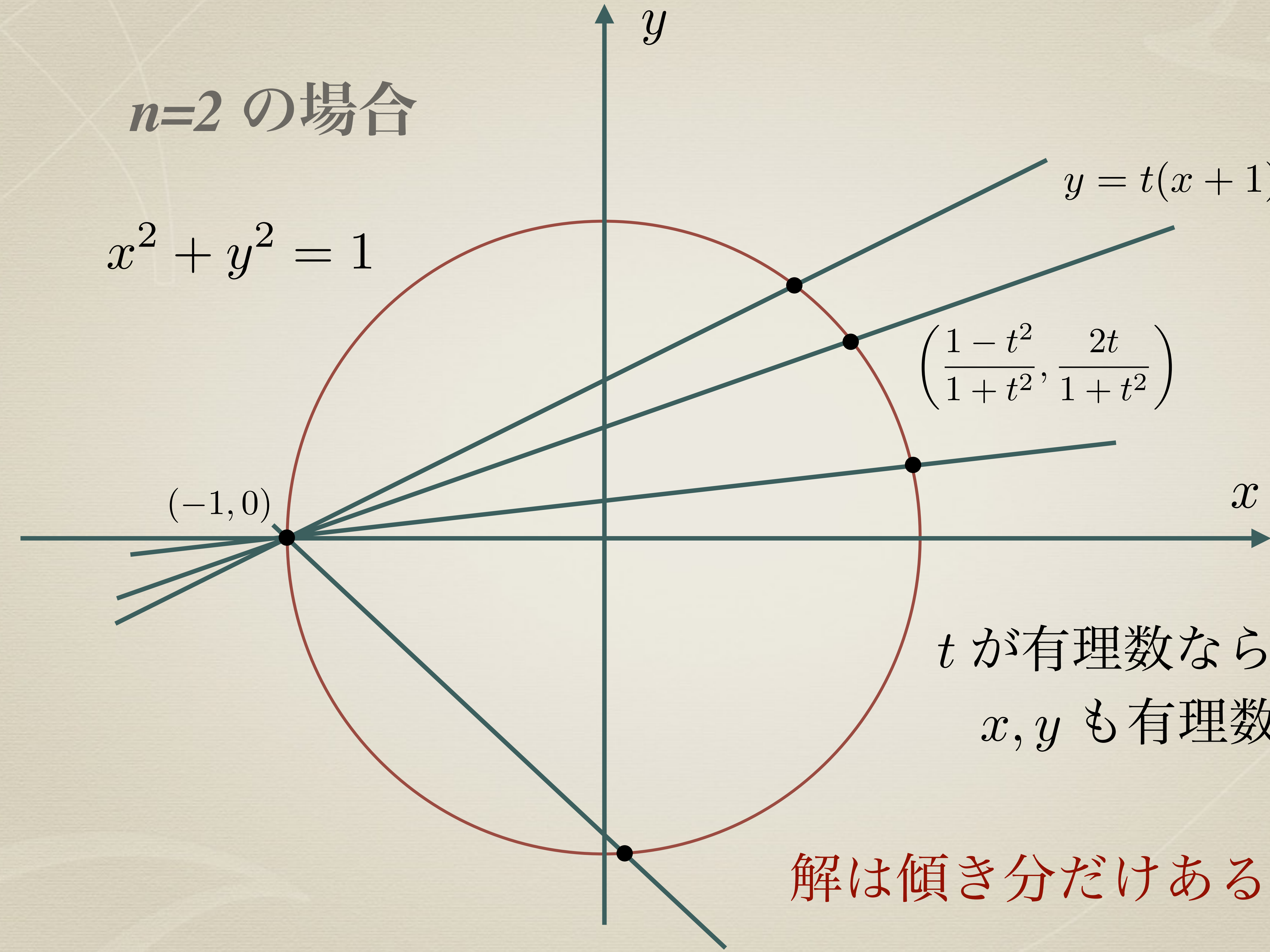


t が有理数なら、
x, y も有理数

解は傾き分だける

n=2 の場合

$$x^2 + y^2 = 1$$



t が有理数なら、
x, y も有理数

解は傾き分だけある

楕円曲線

$$y^2 = 4x^3 - ax - b$$

ただし、$a^3 - 27b^2 \neq 0$

楕円のことでは無い！

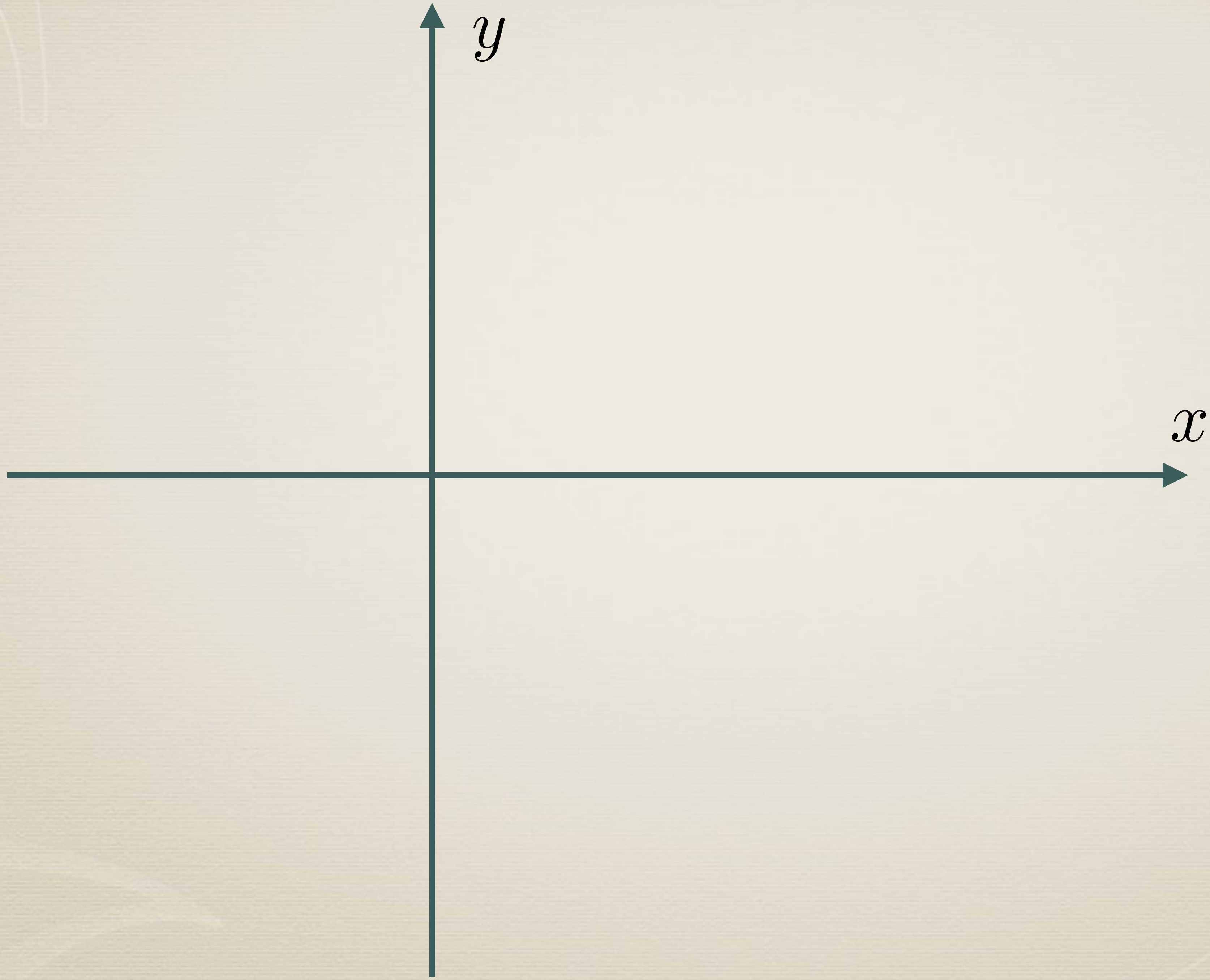
上の式をみたす有理数 x, y の個数？

楕円曲線

$$y^2 = 4x^3 - 5x + 1$$

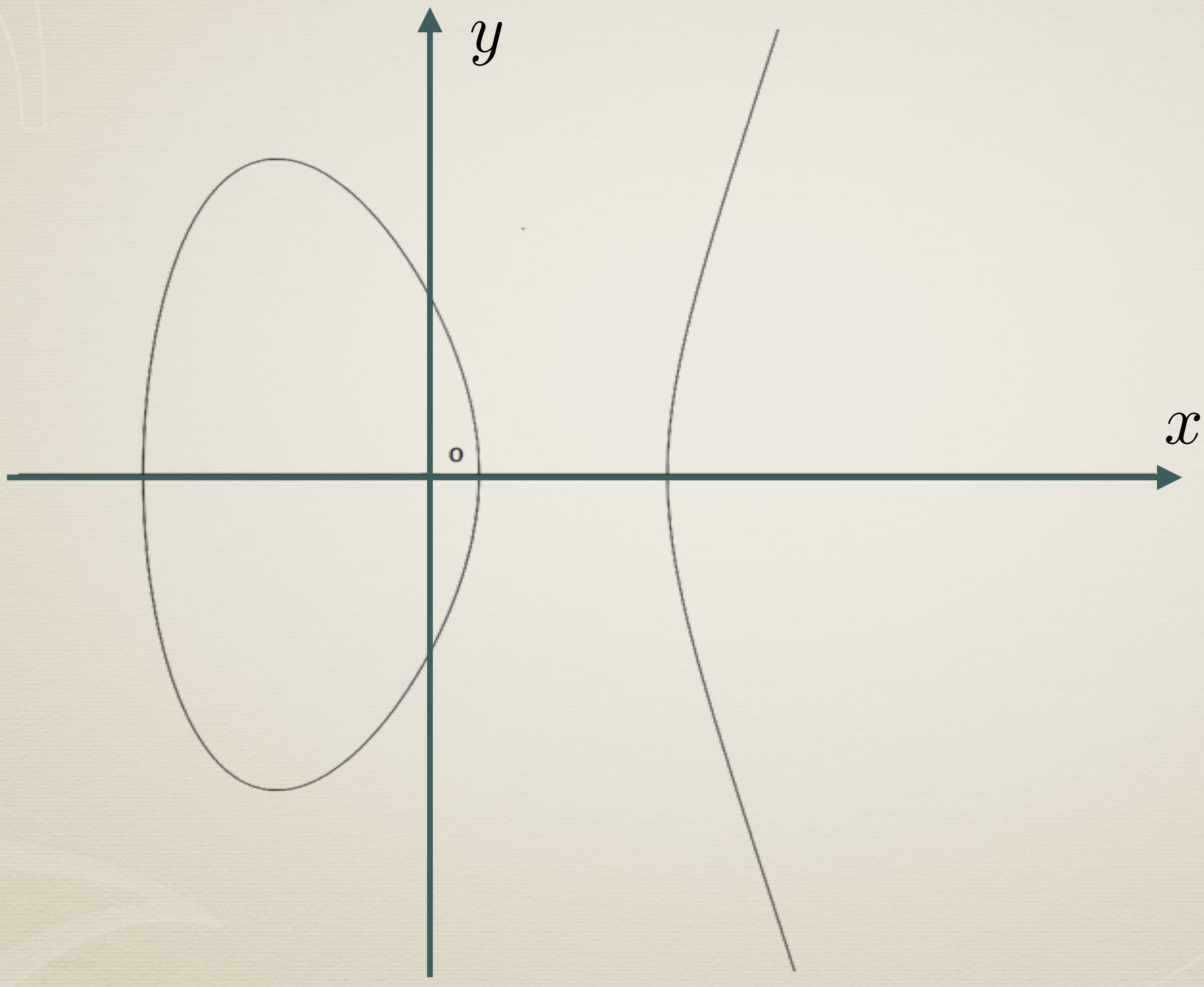
楕円曲線

$$y^2 = 4x^3 - 5x + 1$$



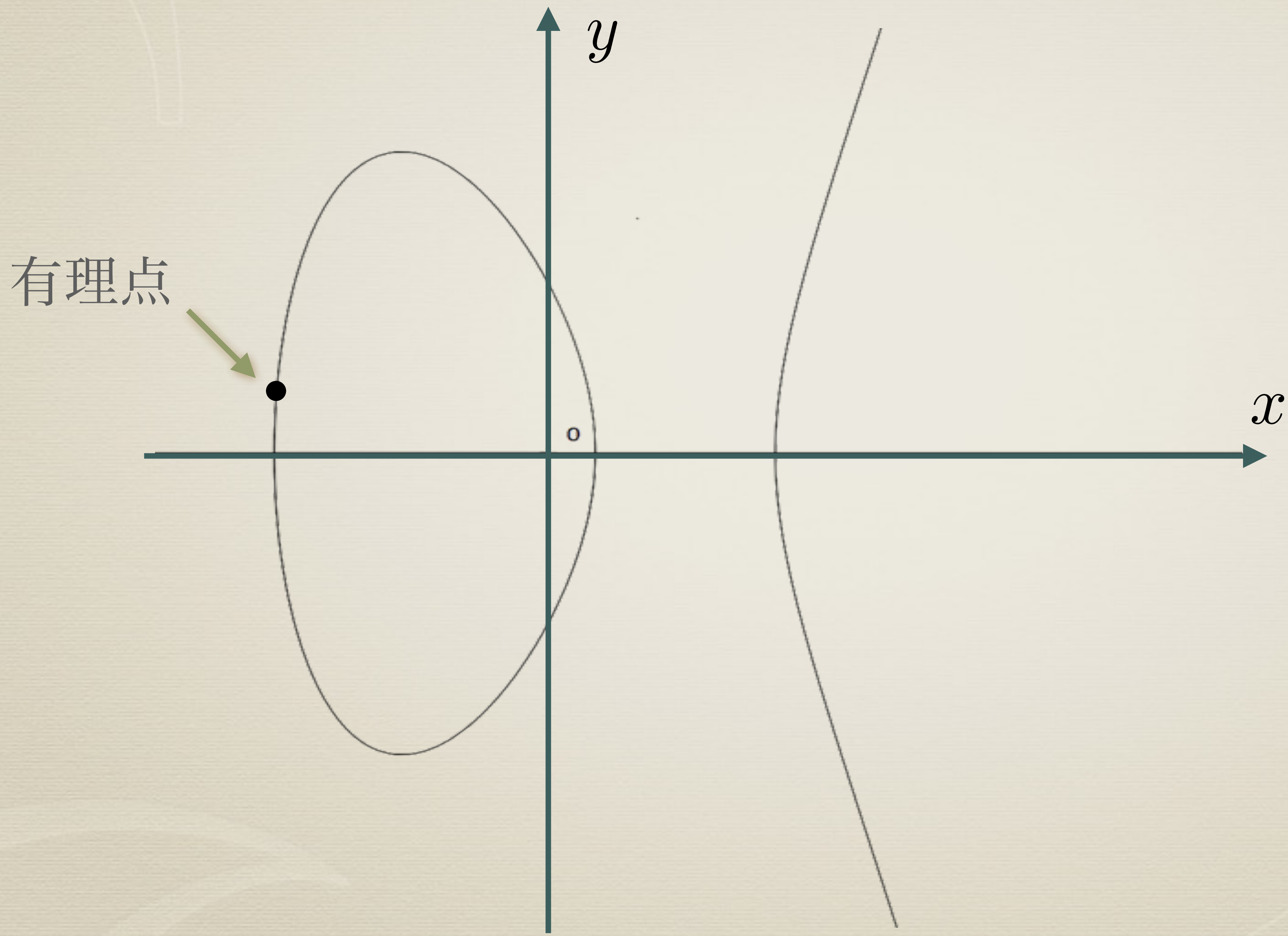
楕円曲線

$$y^2 = 4x^3 - 5x + 1$$



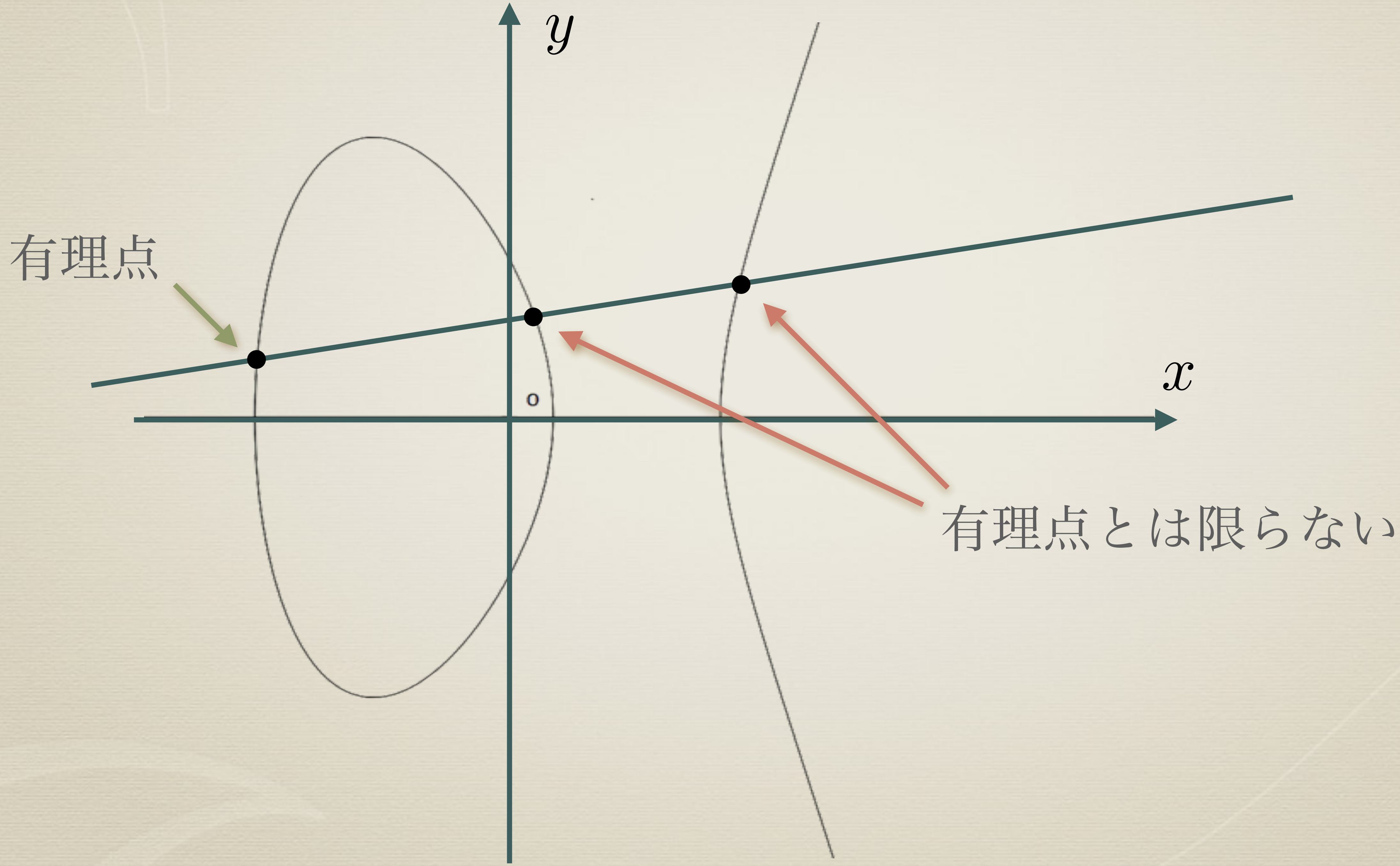
楕円曲線

$$y^2 = 4x^3 - 5x + 1$$



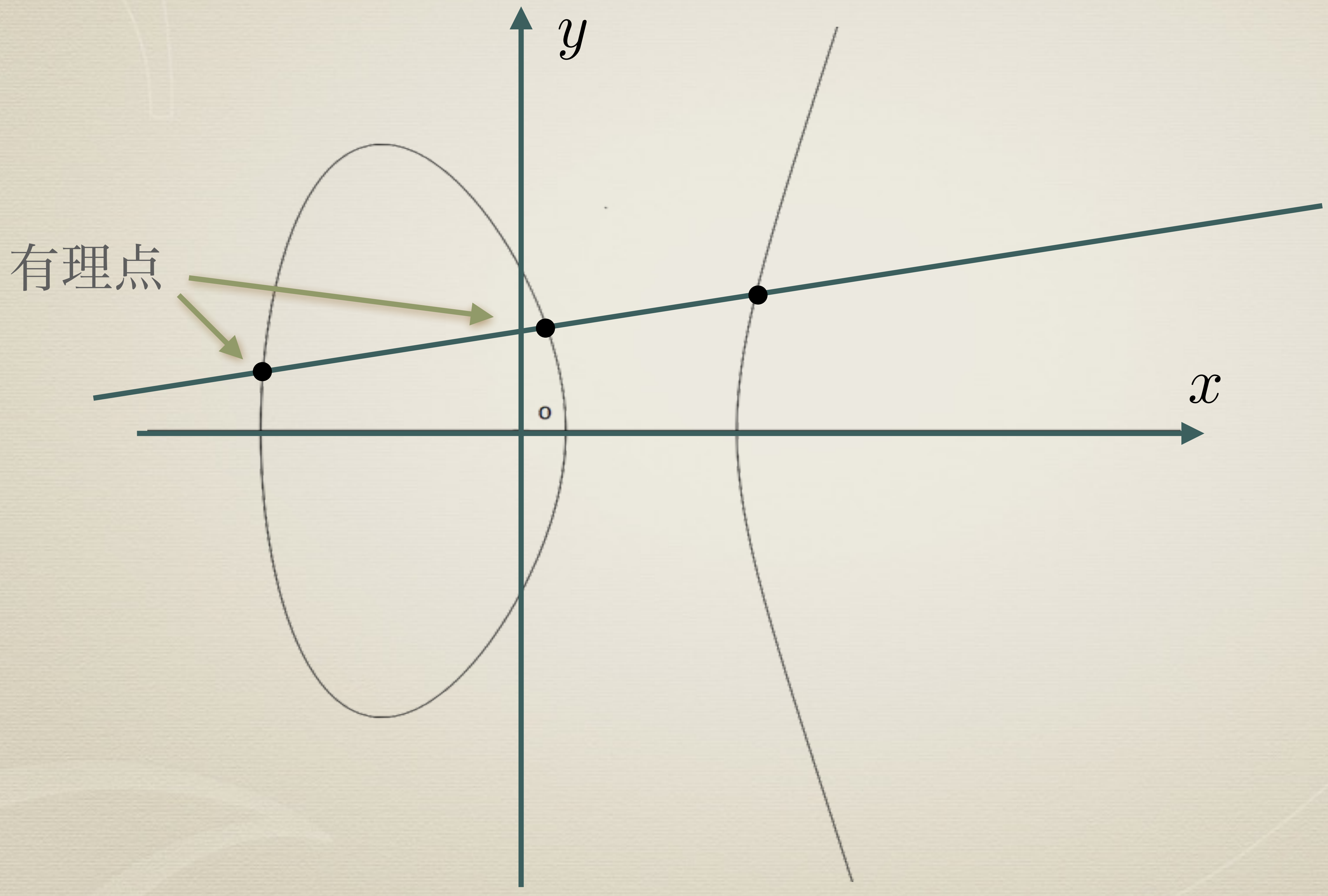
楕円曲線

$$y^2 = 4x^3 - 5x + 1$$



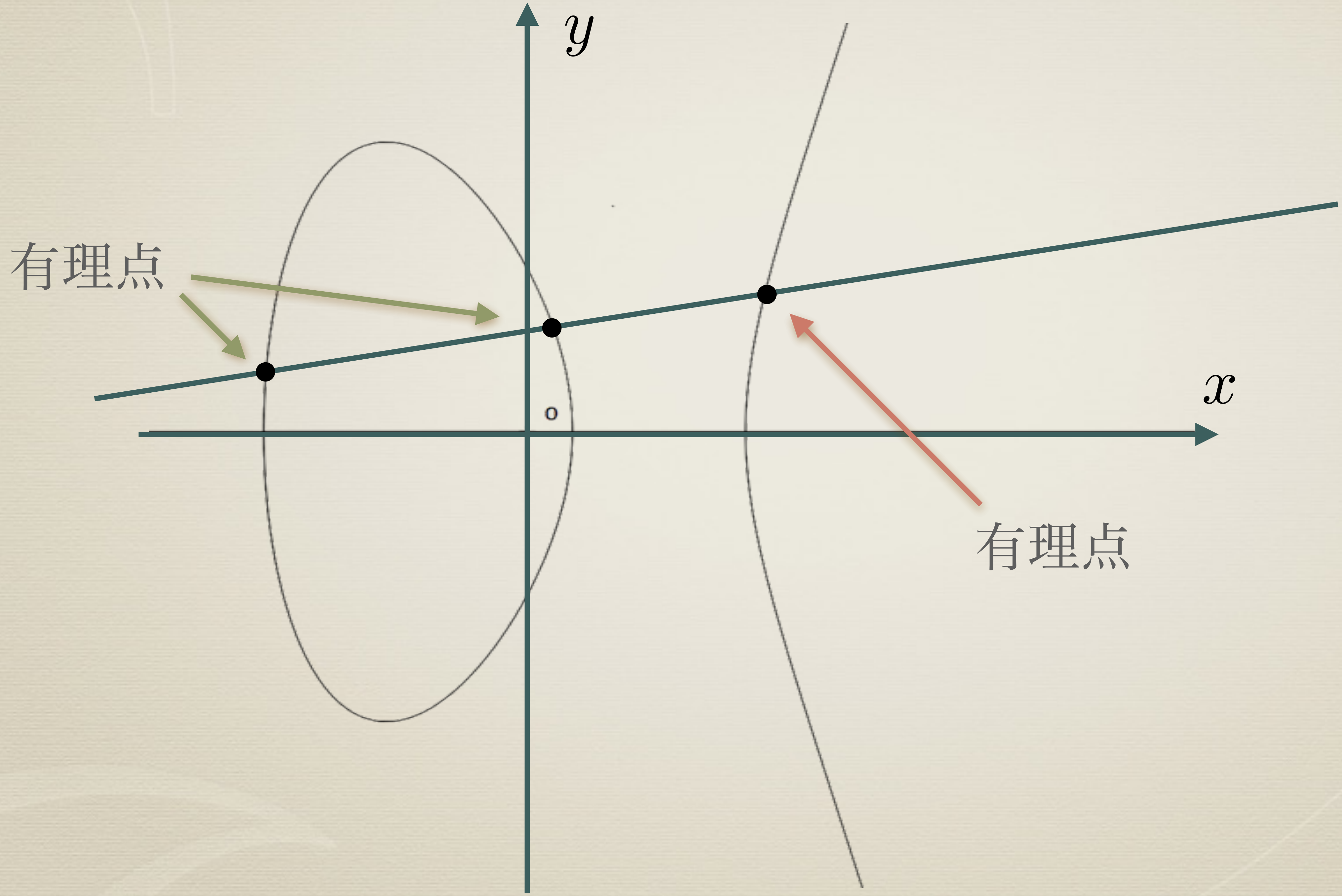
楕円曲線

$$y^2 = 4x^3 - 5x + 1$$



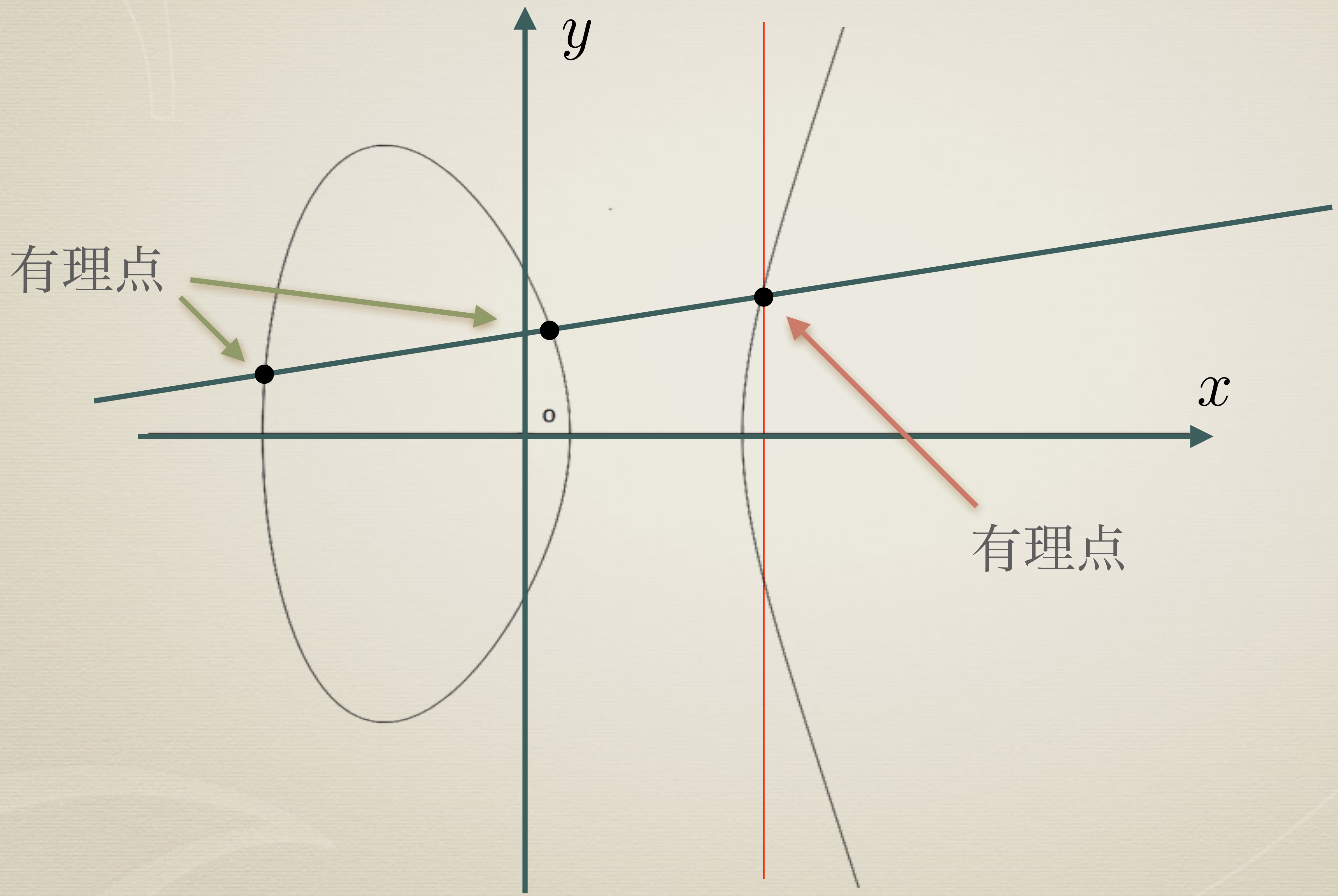
楕円曲線

$$y^2 = 4x^3 - 5x + 1$$



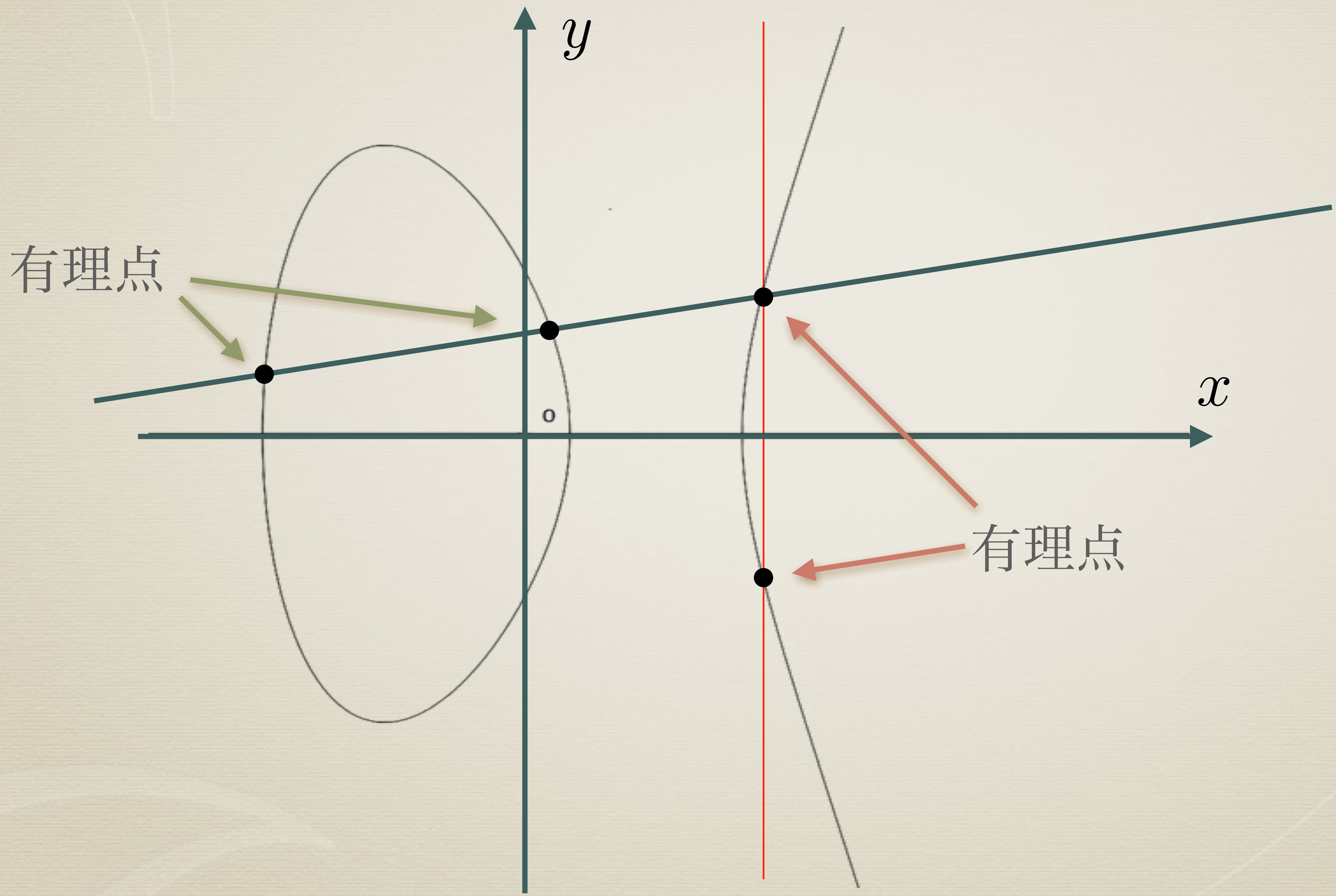
楕円曲線

$$y^2 = 4x^3 - 5x + 1$$



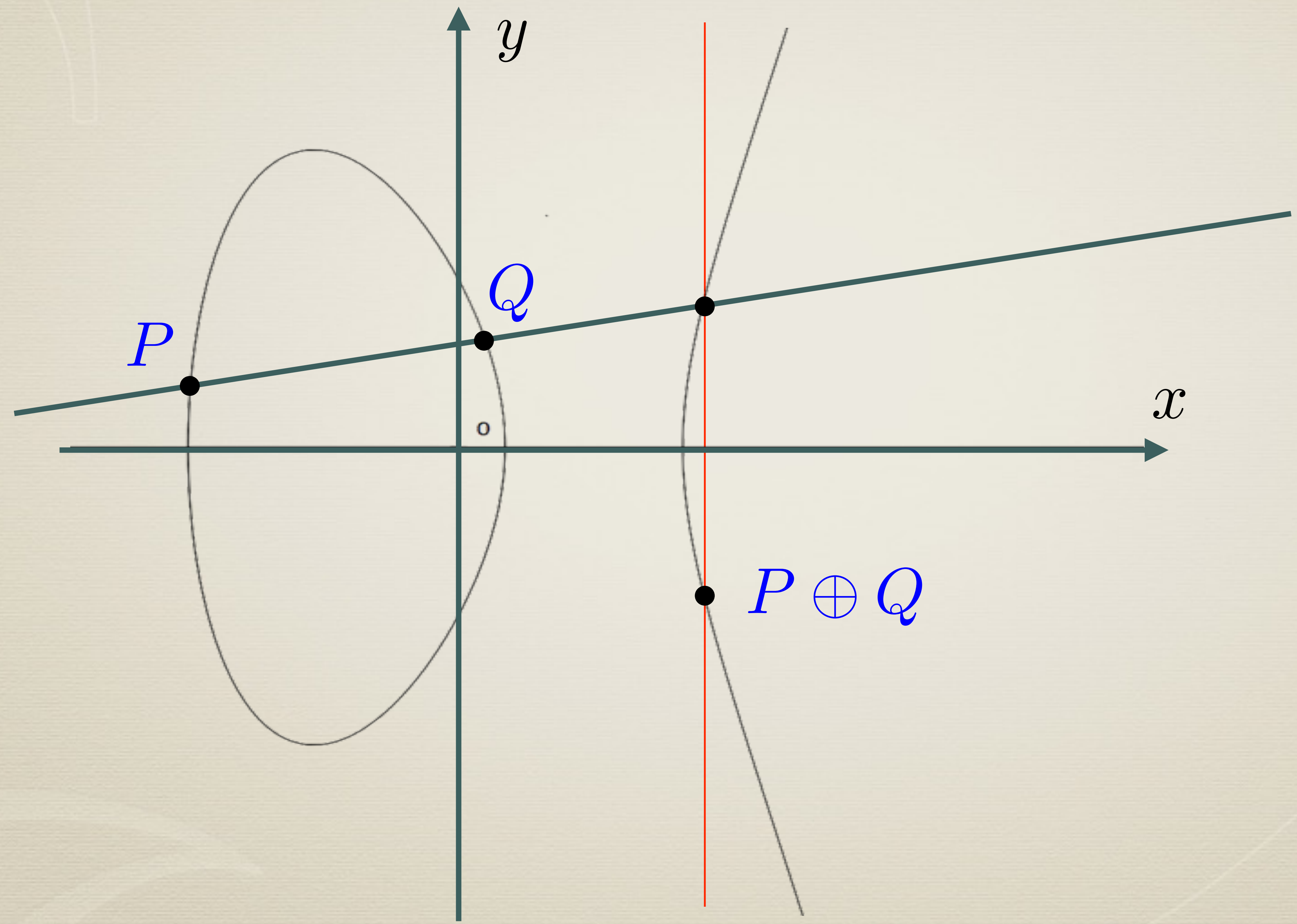
楕円曲線

$$y^2 = 4x^3 - 5x + 1$$



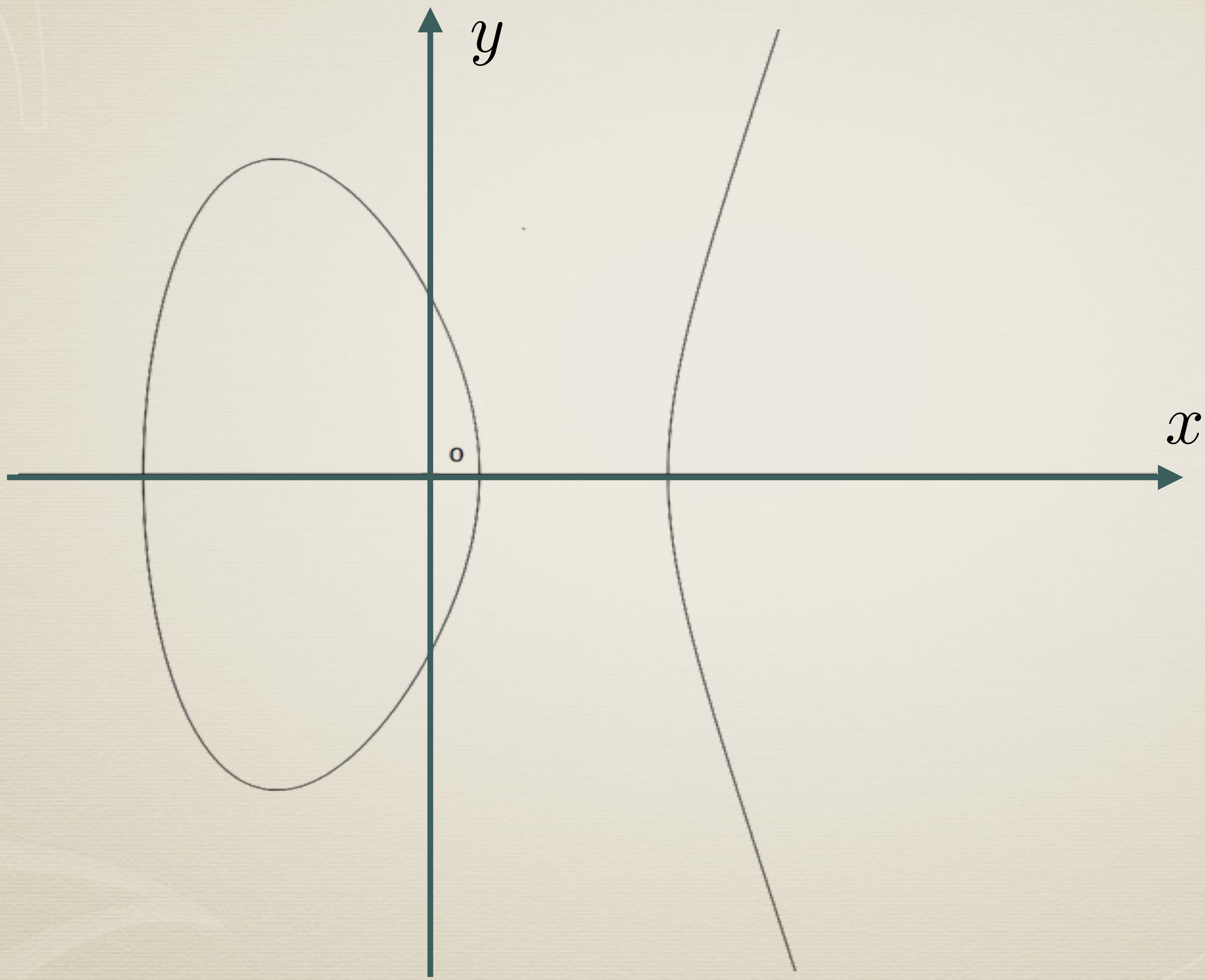
楕円曲線

$$y^2 = 4x^3 - 5x + 1$$



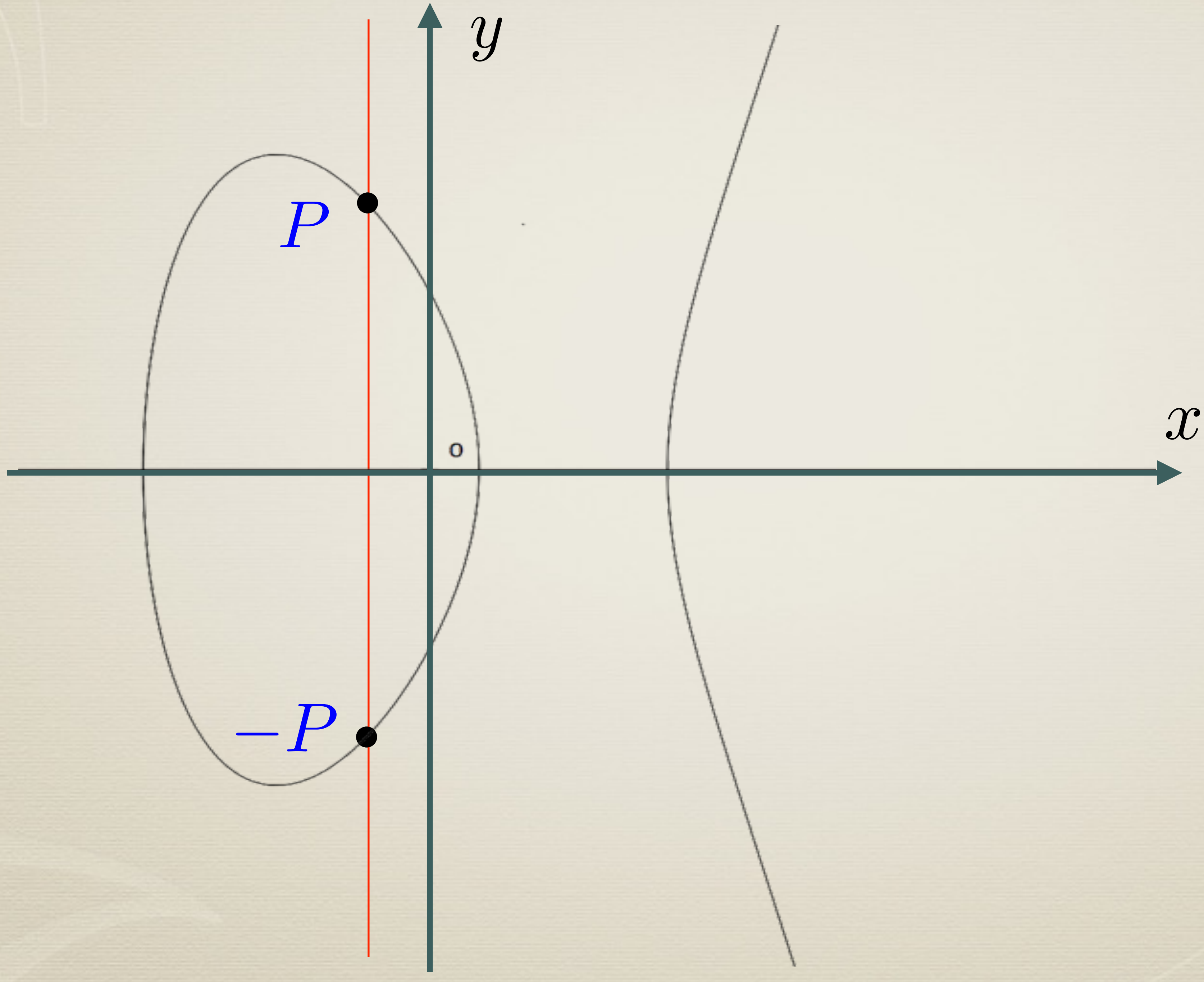
楕円曲線

$$y^2 = 4x^3 - 5x + 1$$



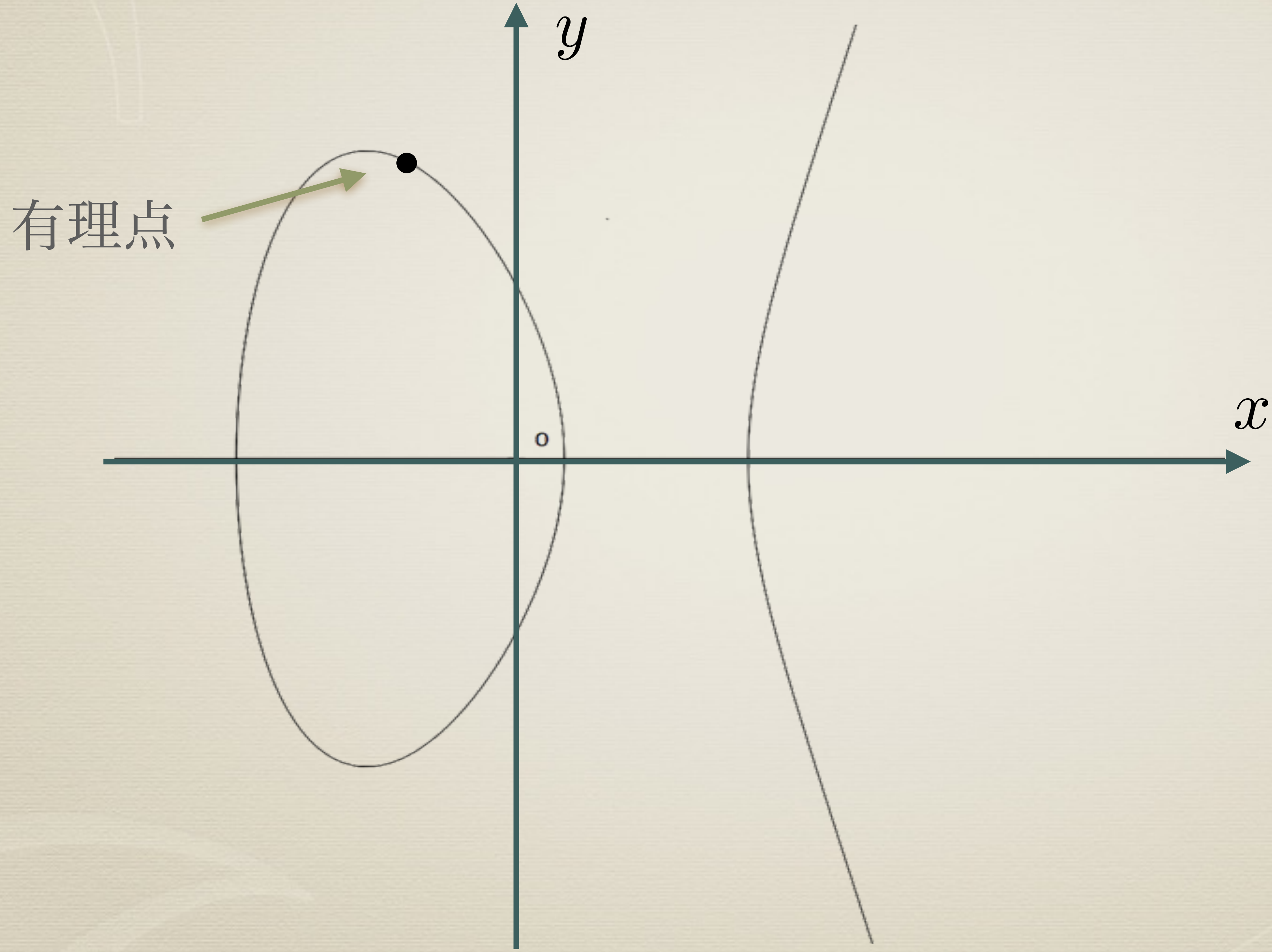
楕円曲線

$$y^2 = 4x^3 - 5x + 1$$



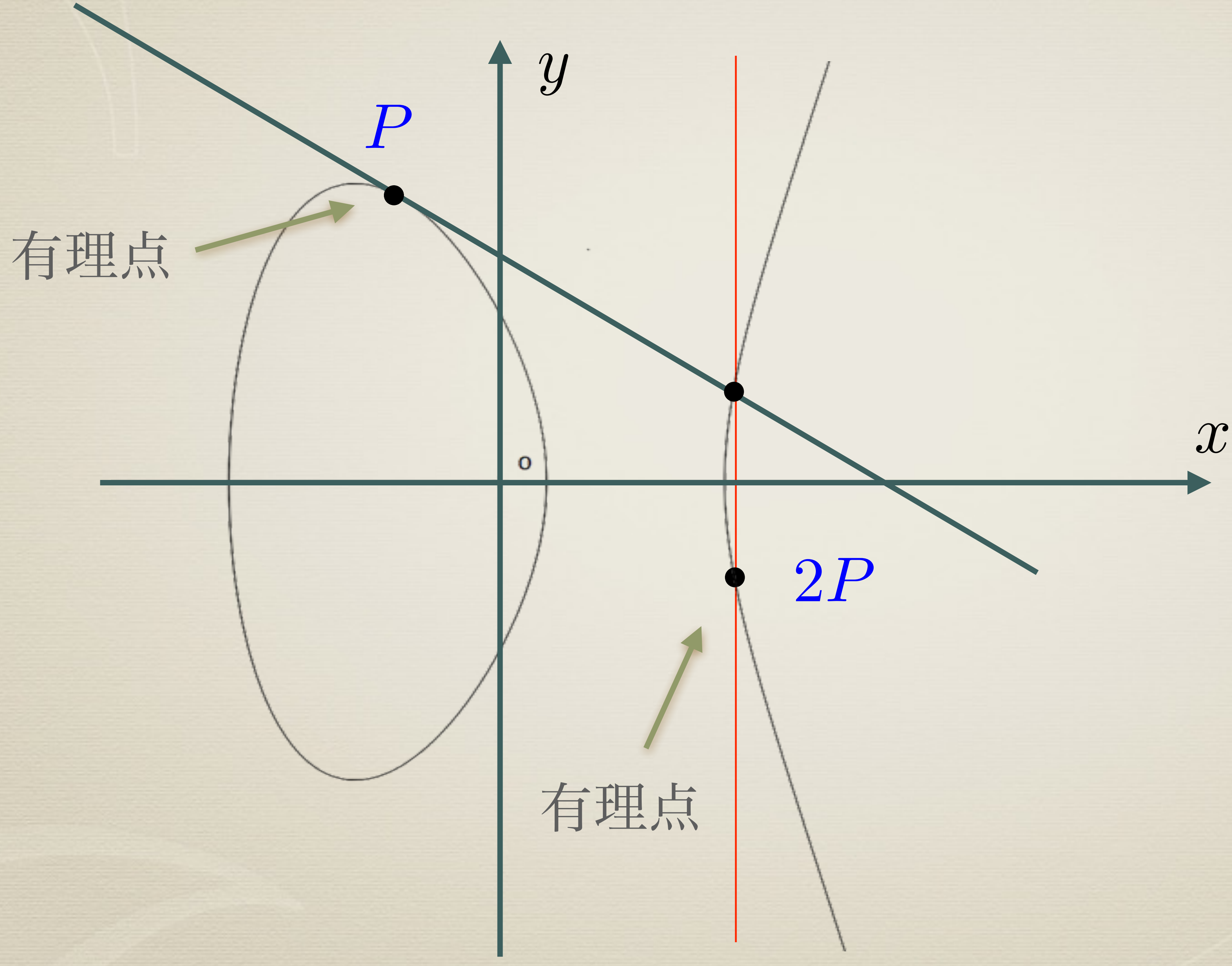
楕円曲線

$$y^2 = 4x^3 - 5x + 1$$



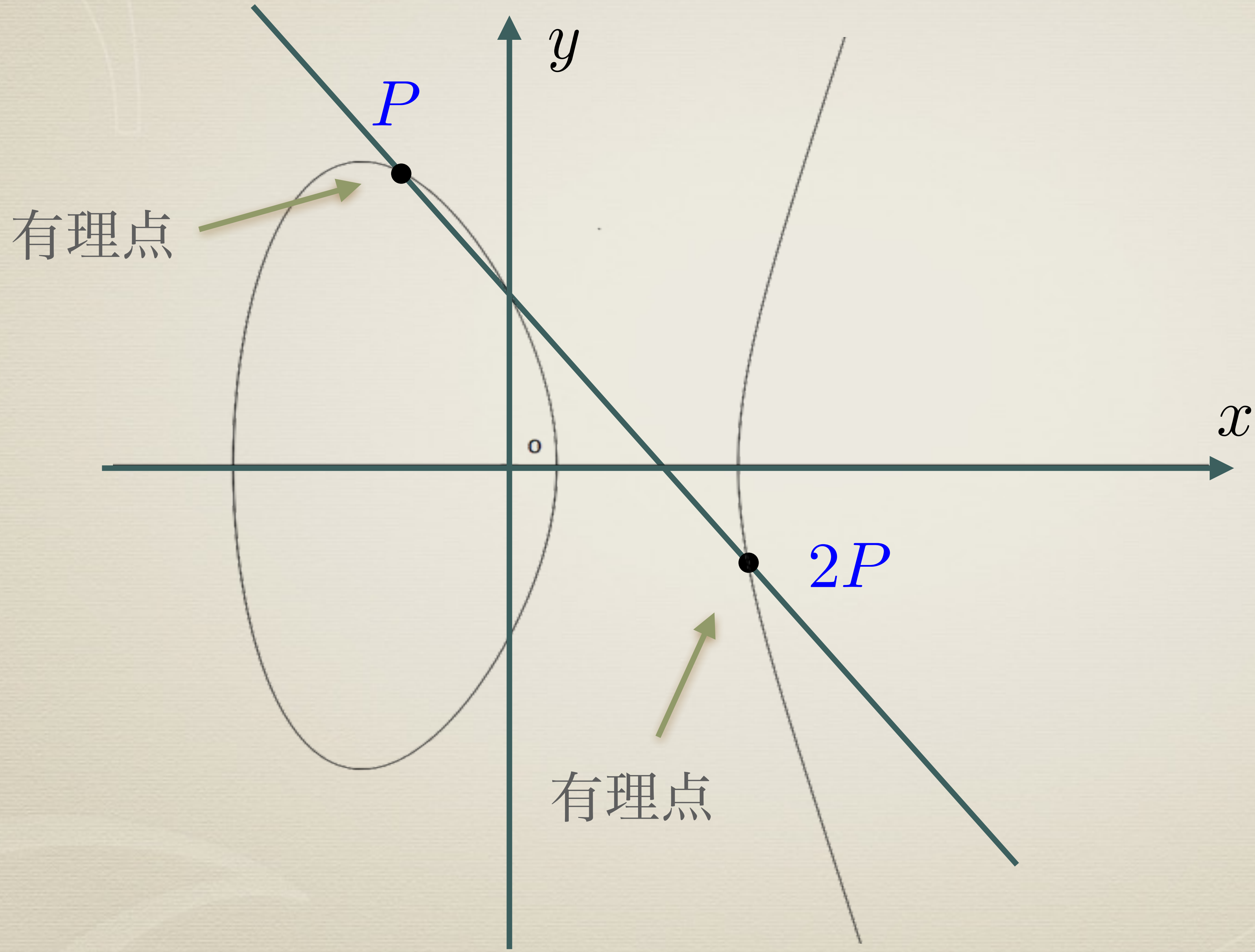
楕円曲線

$$y^2 = 4x^3 - 5x + 1$$



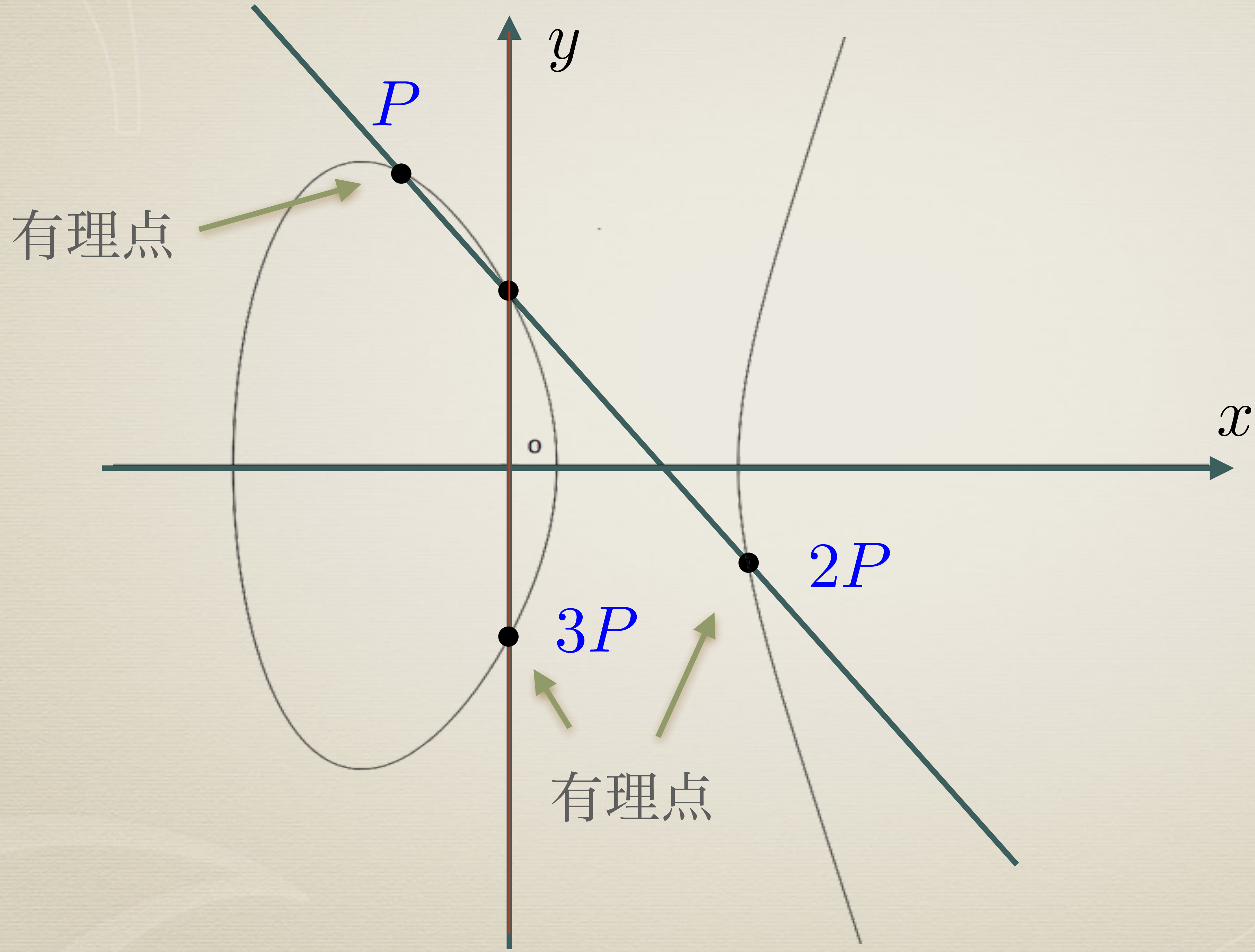
楕円曲線

$$y^2 = 4x^3 - 5x + 1$$



楕円曲線

$$y^2 = 4x^3 - 5x + 1$$



Mordellの定理

楕円曲線には有限個の有理点が存在して、
他の有理点はこれらの和として書ける。

Birch and Swinnerton-Dyer予想

実際、何個の有理点から書けるかを
精密に予想している。