慶應義塾湘南藤沢高等部 数理科学講演会２
— 経路問題と未解決問題 —

理工学部数理科学科　小田芳彰

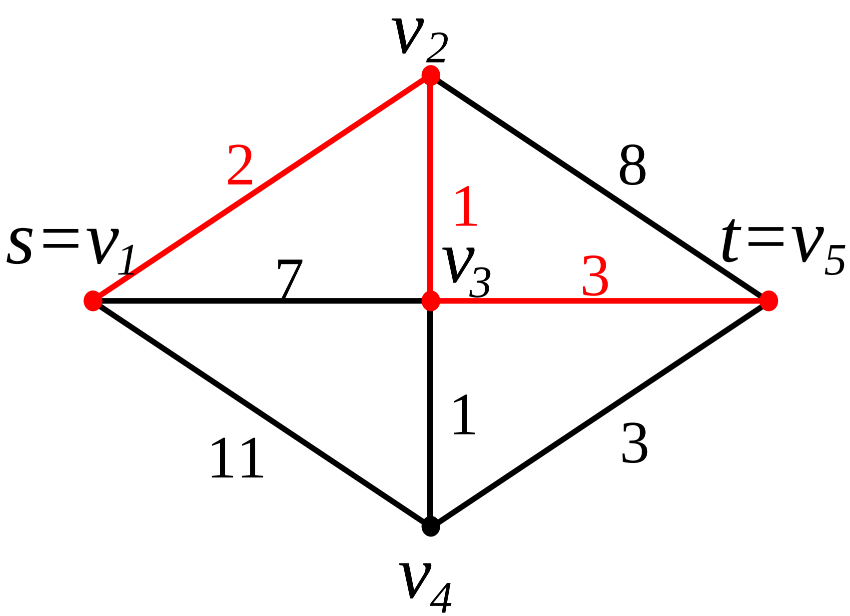
2012.3.9

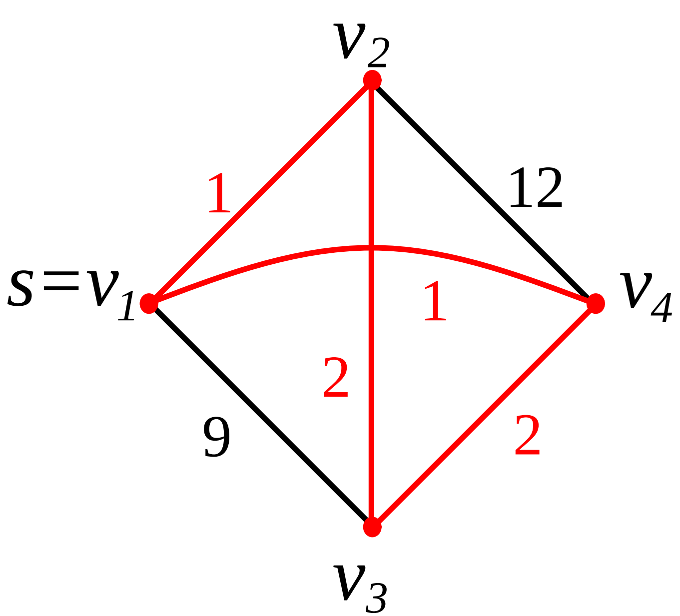
経路問題：問題の説明

経路問題：いくつかの都市と道路網が与えられているときに，移動する際の距離あるいは時間，コストが最小になるさまざまなルート（経路）を見つける問題

問題１．　都市 s から都市 t への最短ルートは？

問題２．　都市 s を出発し，すべての都市を１回ずつ通って，s に戻ってくる最短ルートは？

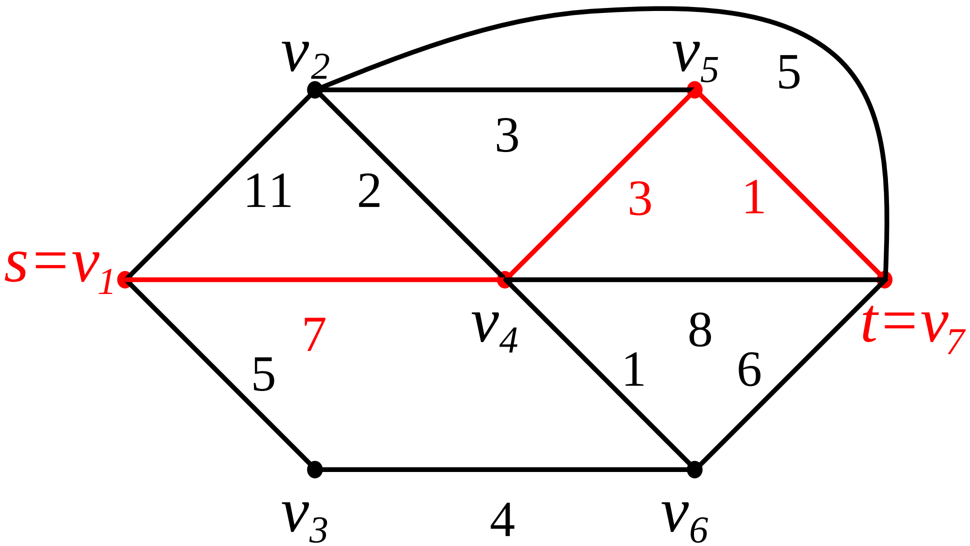




解答

問題１（最短路問題）

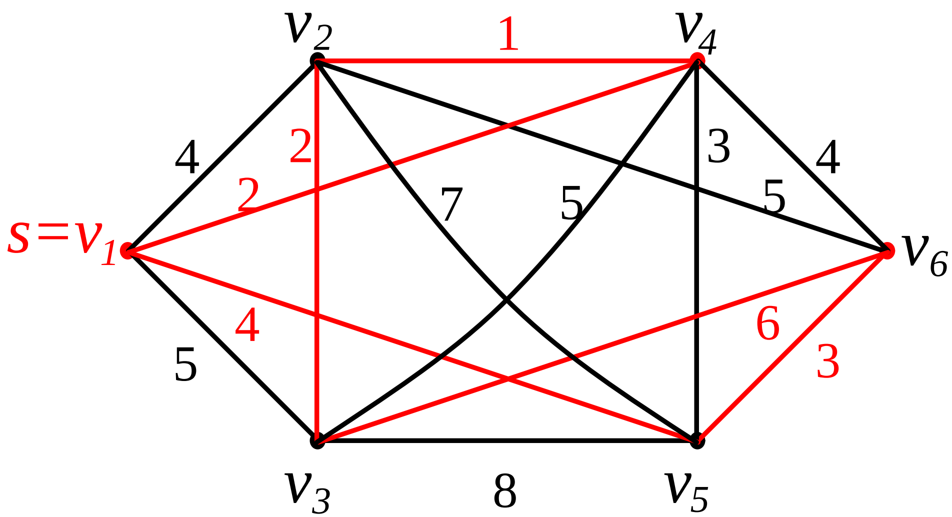
s から t への最短ルート



→カーナビゲーションシステム
　への応用

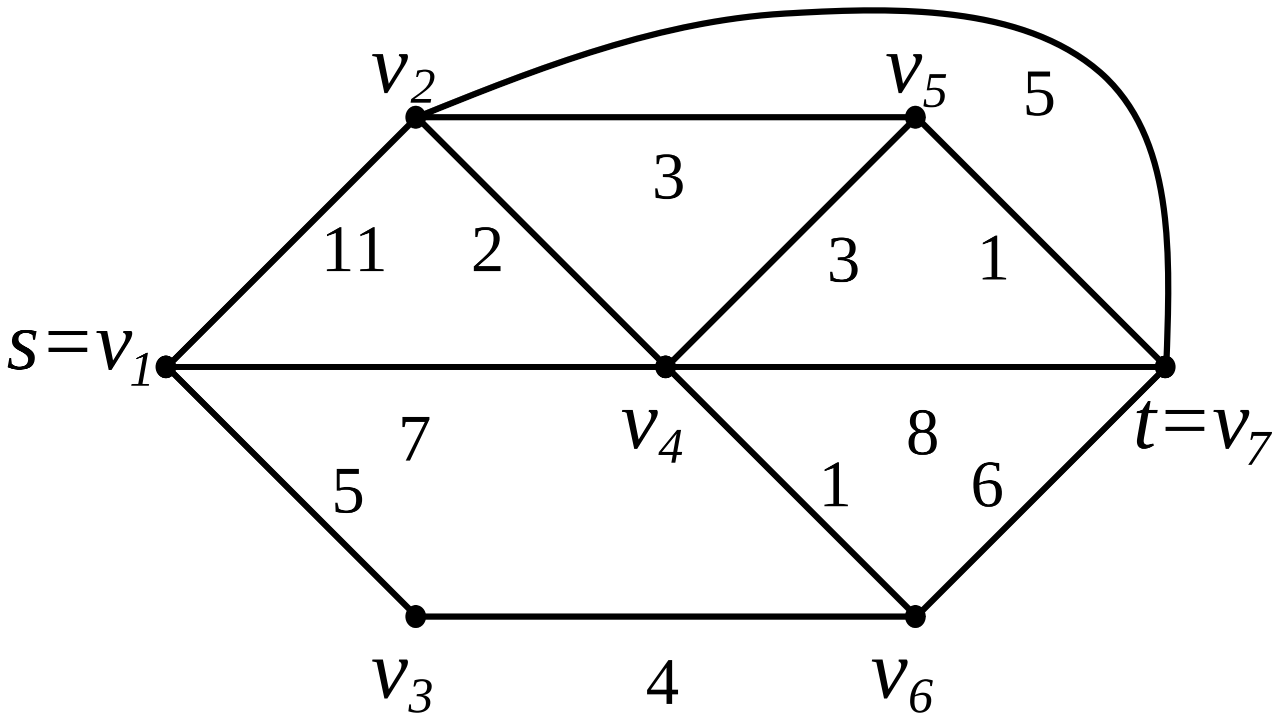
問題２（巡回セールスマン問題）

s を出発し，すべての都市を１回ずつ通り，s に戻ってくる最短ルート



→セールスマンが顧客先をすべて
　まわりたい

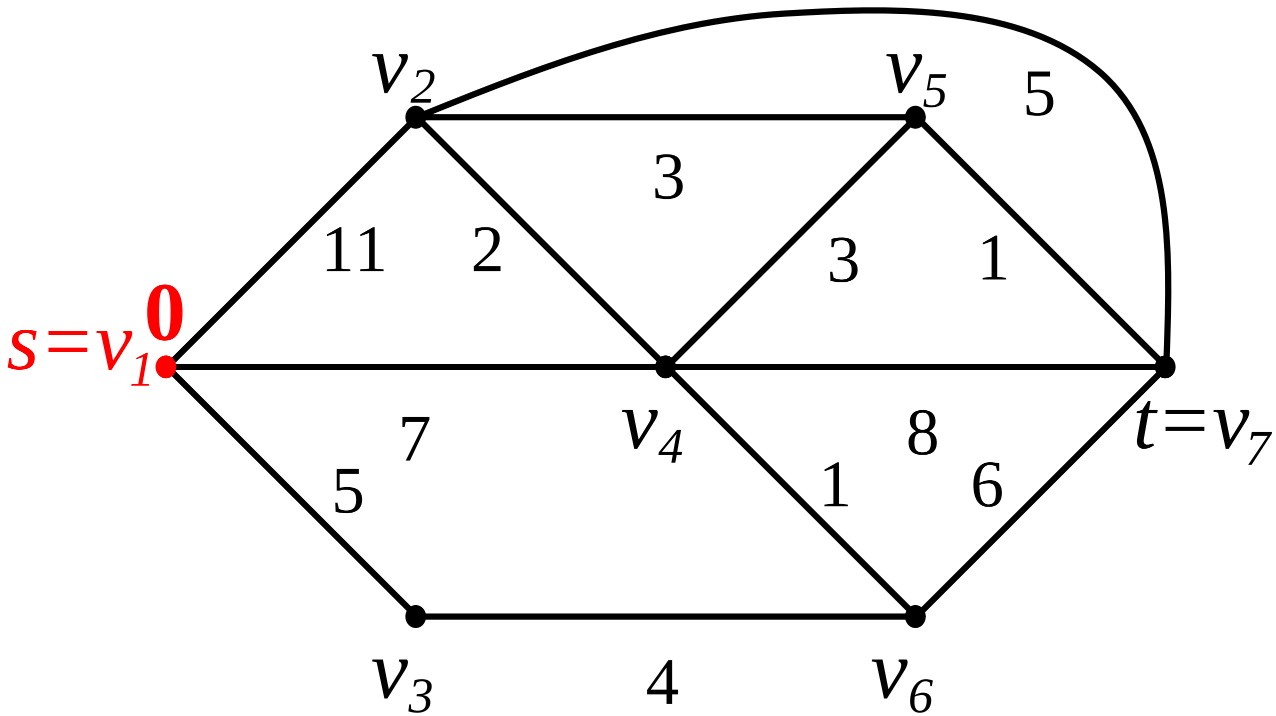
計算手順



s から他のすべての都市への最短ルートを近い方から順に調べていく.

問題１の解説：最短路問題（ダイクストラ法）

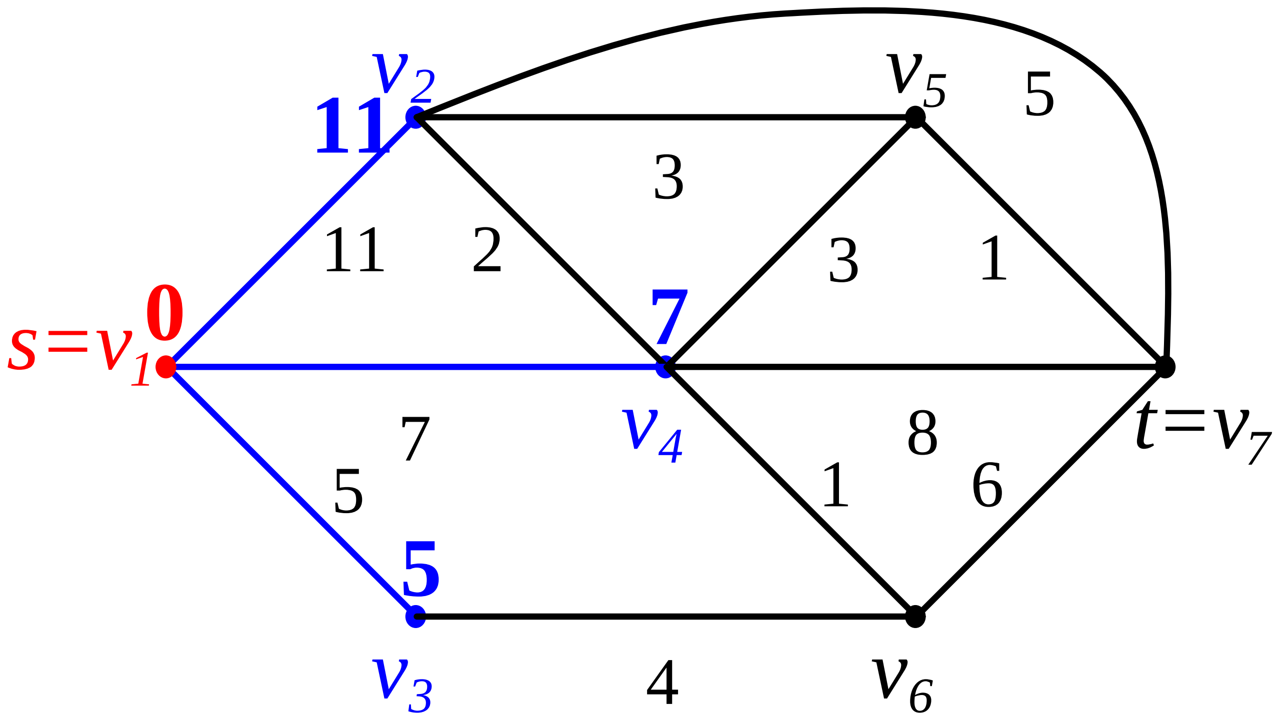
計算手順



s から他のすべての都市への最短ルートを近い方から順に調べていく.
まず，s から s までは当然 0.

問題１の解説：最短路問題（ダイクストラ法）

計算手順

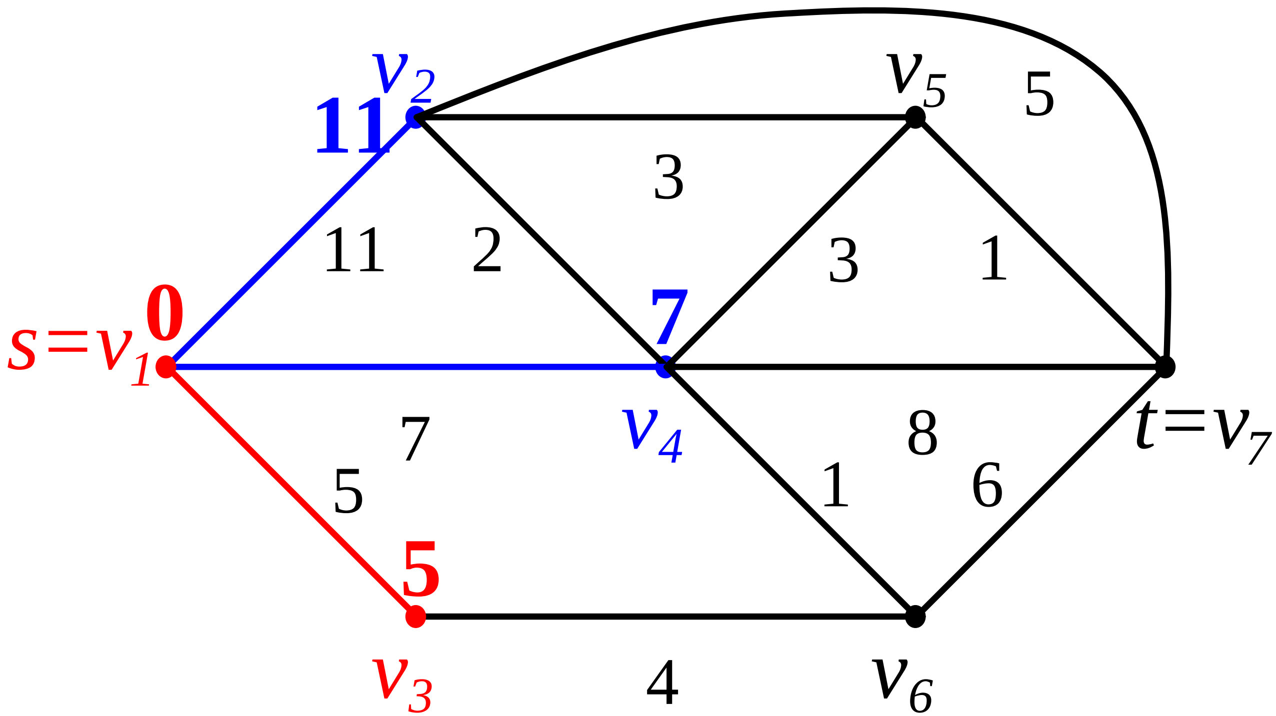


s から他のすべての都市への最短ルートを近い方から順に調べていく.

s から直接たどれる都市は v_2, v_3, v_4.

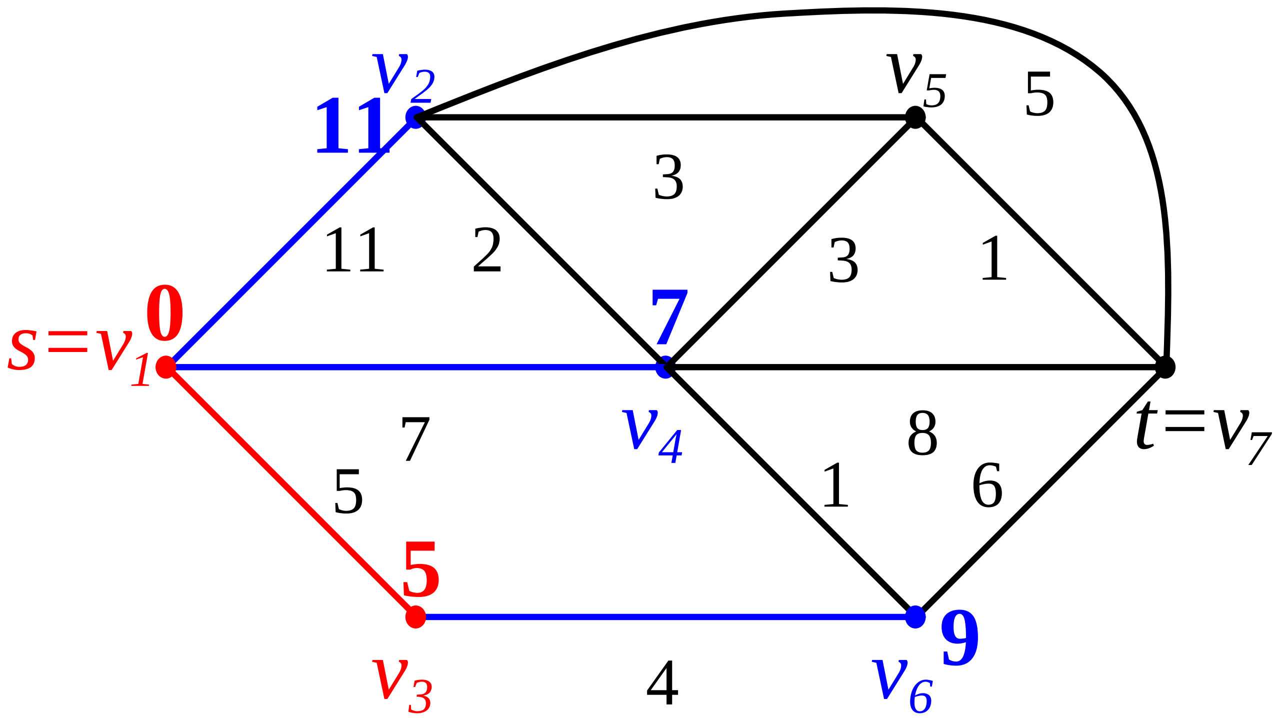
問題１の解説：最短路問題（ダイクストラ法）

計算手順



s から他のすべての都市への最短ルートを近い方から順に調べていく．
どの道路の距離（値）も正なので，
この時点で，s から v_3 への最短ルートが確定．

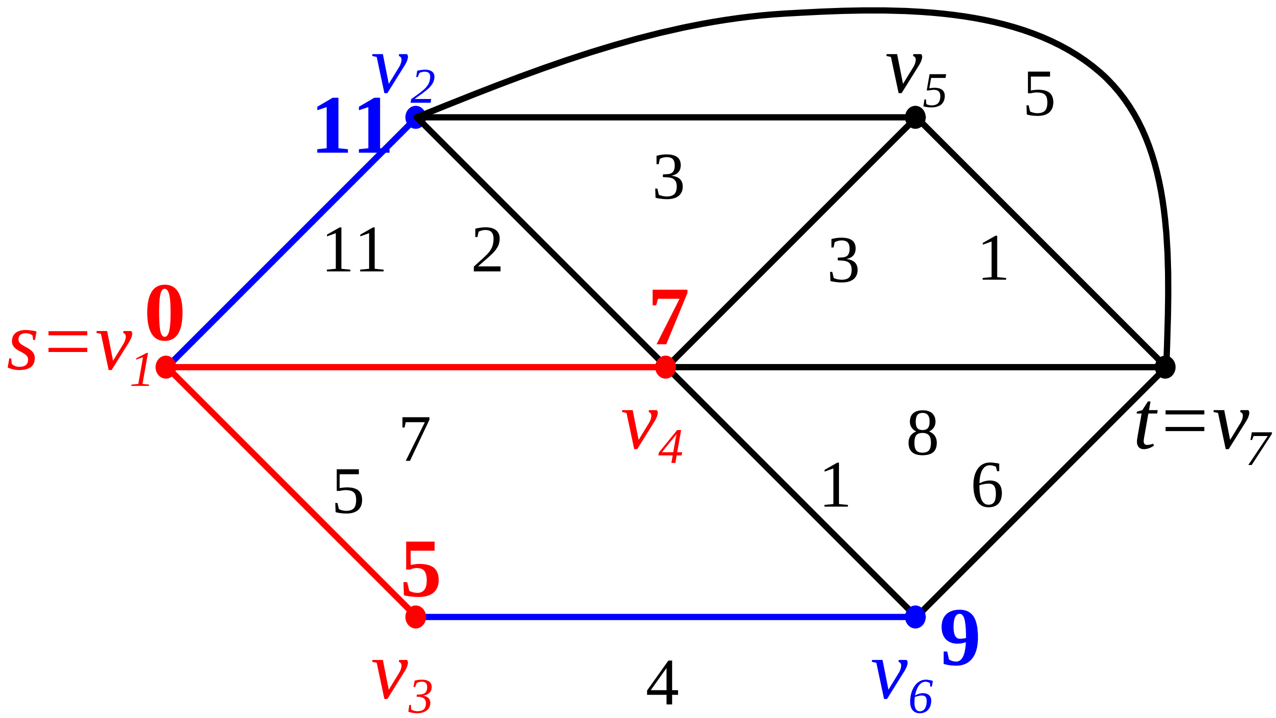
計算手順



この時点で，s から v_3 への最短ルートが確定.

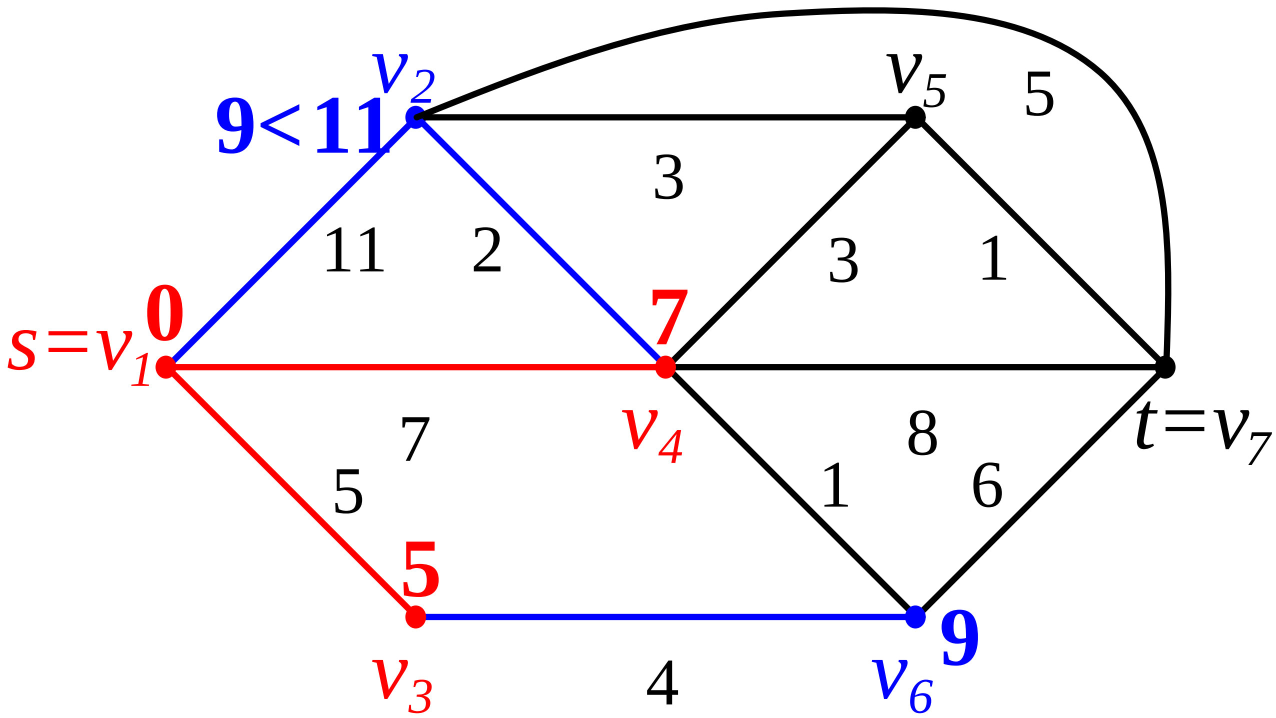
問題１の解説：最短路問題（ダイクストラ法）

計算手順



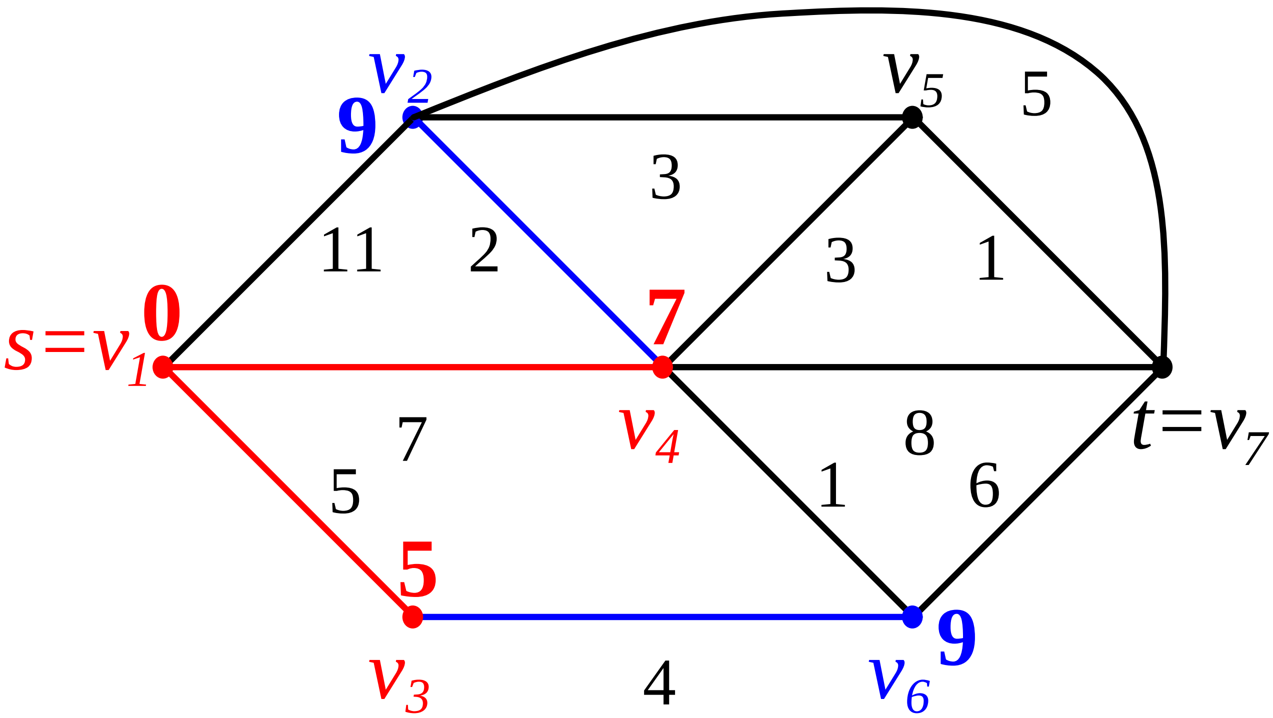
この時点で，s から v_3,v_4 への最短ルートが確定．

計算手順



この時点で，s から v_3, v_4 への最短ルートが確定.

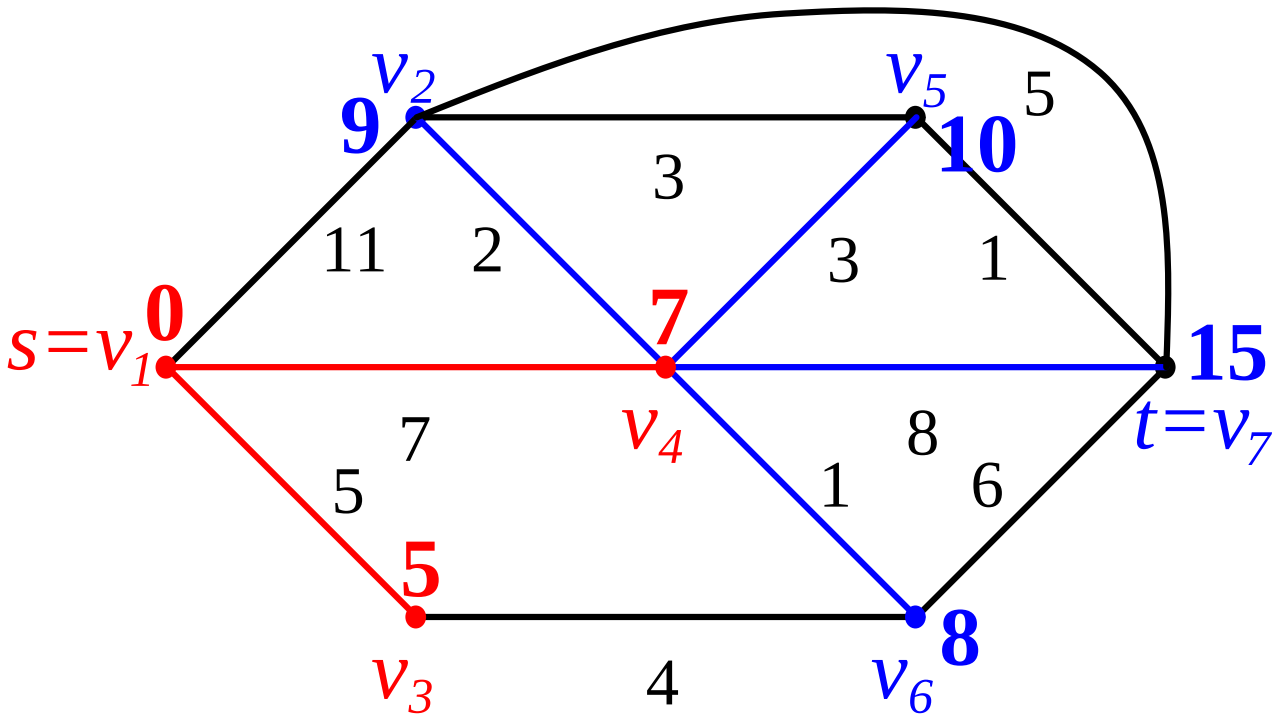
計算手順



この時点で，s から v_3,v_4 への最短ルートが確定.

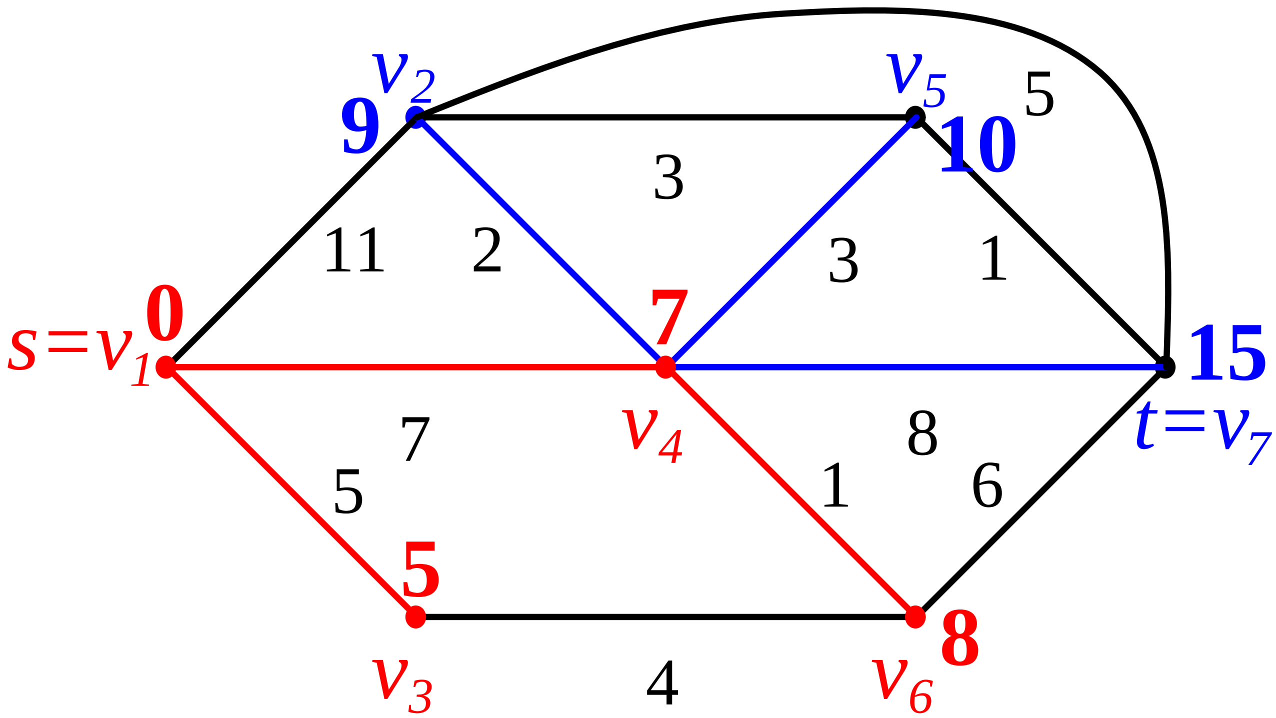
問題１の解説：最短路問題（ダイクストラ法）

計算手順



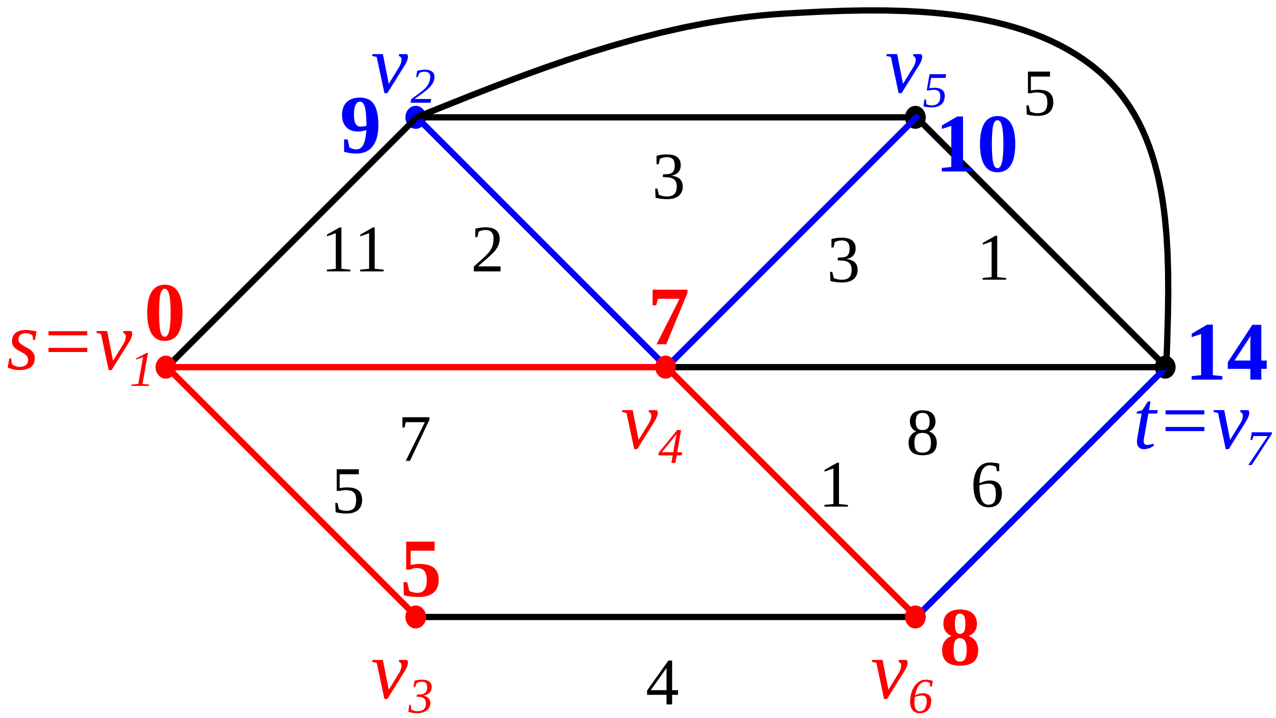
この時点で，s から v_3,v_4 への最短ルートが確定.

計算手順



この時点で，s から v_3,v_4,v_6 への最短ルートが確定.

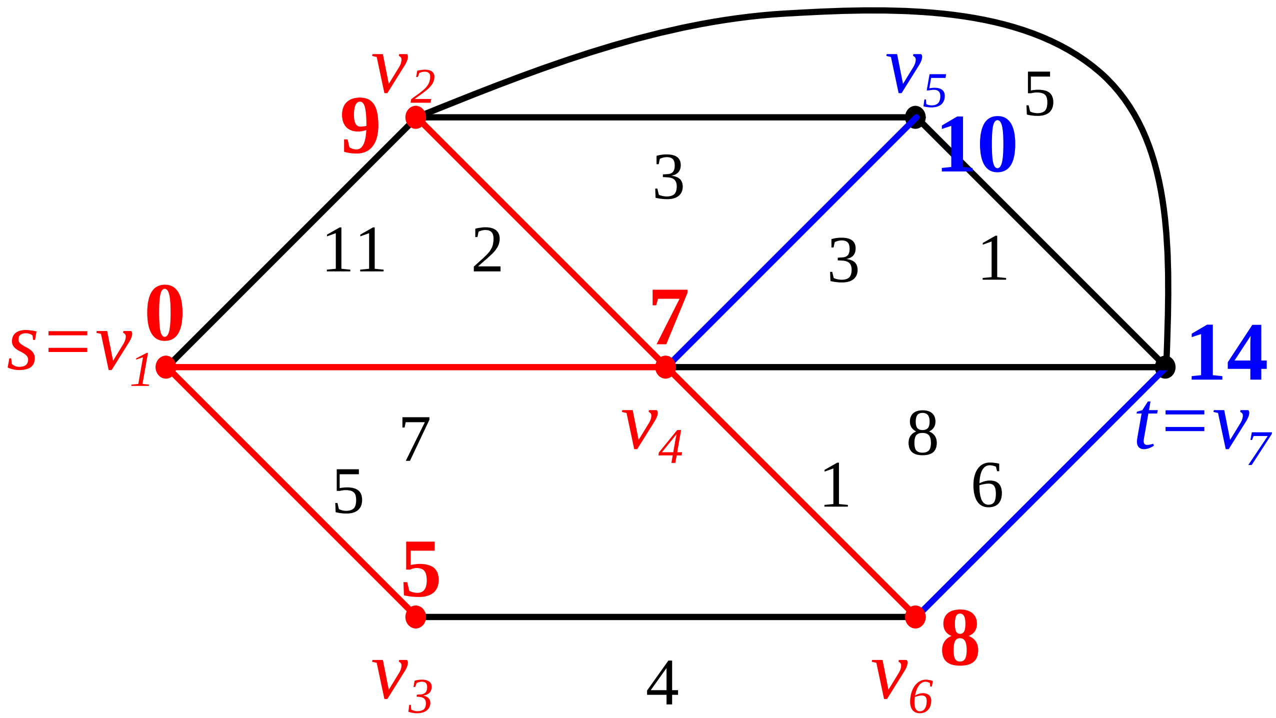
計算手順



この時点で，s から v_3,v_4,v_6 への最短ルートが確定.

問題１の解説：最短路問題（ダイクストラ法）

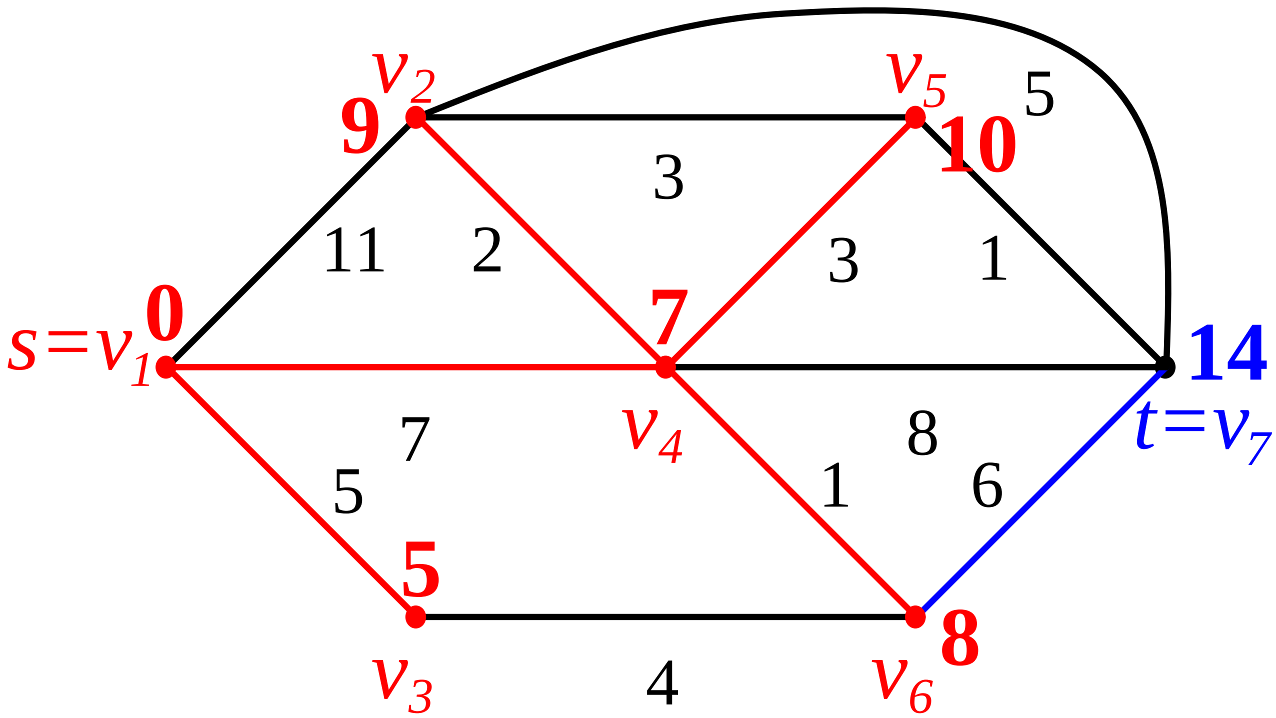
計算手順



この時点で，s から v_3,v_4,v_6,v_2 への最短ルートが確定.

問題１の解説：最短路問題（ダイクストラ法）

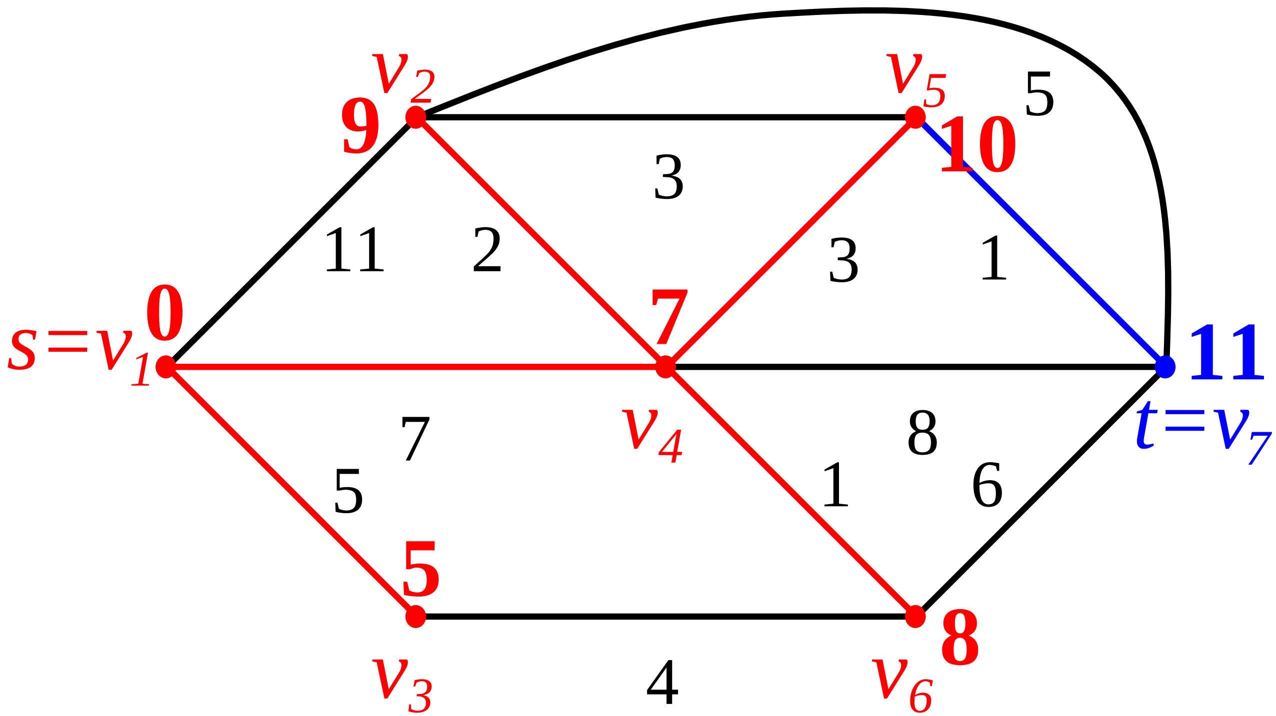
計算手順



この時点で，s から v_3,v_4,v_6,v_2,v_5 への最短ルートが確定.

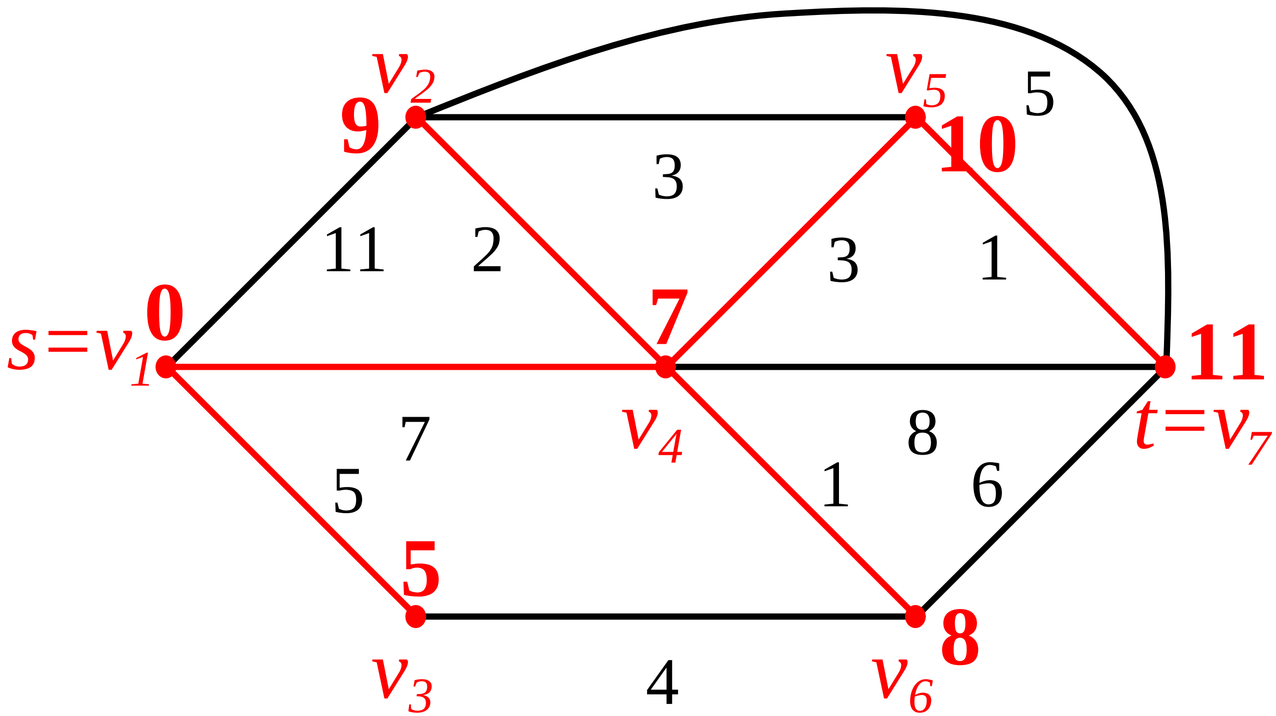
問題１の解説：最短路問題（ダイクストラ法）

計算手順



この時点で，s から v_3,v_4,v_6,v_2,v_5 への最短ルートが確定.

計算手順



この時点で，s から v_3,v_4,v_6,v_2,v_5,v_7 への最短ルートが確定．
このダイクストラ法により，都市数 n に対し n^2 に比例する計算時間で最短路問題の解が得られる．

問題２の解説：巡回セールスマン問題

順列に対応させて全通り考える.

以下，n 都市を $1, 2, \cdots, n$ とする.
都市 n を出発し，残りの $n-1$ 都市のたどり方は $n-1$ 個の順列に対応.
例 $n = 6$ のとき

$$\begin{array}{ccc} 6,1,2,3,4,5(,6) & 6,1,2,3,5,4(,6) & 6,1,2,4,3,5(,6) \\ 6,1,2,4,5,3(,6) & 6,1,2,5,3,4(,6) & 6,1,2,5,4,3(,6) \\ 6,1,3,2,4,5(,6) & \cdots & 6,5,4,3,2,1(,6) \end{array}$$

※ 対称性を考慮すると，$6,5,4,3,2,1(,6)$ は $6,1,2,3,4,5(,6)$ の逆回りなので，実質同じルートとみなせる.

→全部で $\dfrac{(n-1)!}{2}$ 通り

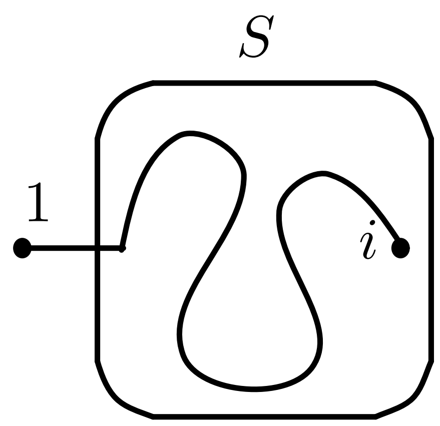
さまざまな工夫により，場合の数を減らせるが，n が大きくなると一般には依然膨大な組み合わせのまま.

巡回セールスマン問題の厳密解法（時間をかけても最適解を）

動的計画法

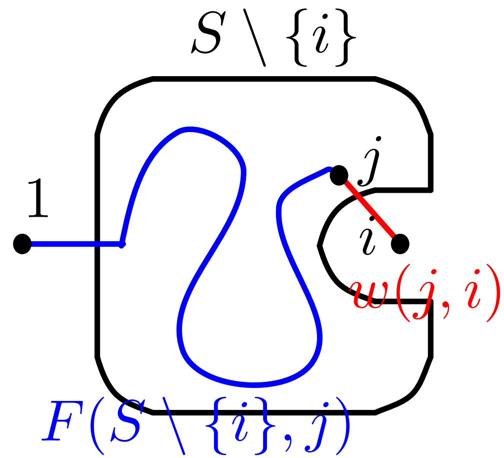
$F(S,i)$**:** 1 から i へのパスのうち，S のすべての頂点を通るものの中で，重みの和の最小値

$$F(\{i\},i) = w(1,i)(2 \le i \le n) \quad (1)$$
$$F(S,i) = \min_{j\in S\setminus\{i\}} \{F(S\setminus\{i\},j) + w(j,i)\} \quad (2)$$



(1) 式の後，**(2)** 式を $|S| = 2,3,\cdots,n-1$ の順で計算．
最後に次を計算すると，重みの和の最小値が得られる．

$$\min_{j\in V(G)\setminus\{1\}} \{F(V(G)\setminus\{1\},j) + w(j,1)\}$$



$n^2 2^n$ に比例する計算時間で巡回セールスマン問題の解が得られる．

他の厳密解法として，分枝限定法などがある．

100MIPS(毎秒 10^8 回の演算が可能) の計算機による計算時間

多項式時間

入力サイズ n	n	$n\log_2 n$	n^2	n^3	n^5
10	1×10^{-7} 秒	3.32×10^{-7} 秒	1×10^{-6} 秒	1×10^{-5} 秒	0.0015 秒
20	2×10^{-7} 秒	8.64×10^{-7} 秒	4×10^{-6} 秒	8×10^{-5} 秒	0.032 秒
30	3×10^{-7} 秒	1.47×10^{-6} 秒	9×10^{-6} 秒	2.7×10^{-4} 秒	0.243 秒
40	4×10^{-7} 秒	2.13×10^{-6} 秒	1.6×10^{-5} 秒	6.4×10^{-4} 秒	1.02 秒
50	5×10^{-7} 秒	2.82×10^{-6} 秒	2.5×10^{-5} 秒	1.25×10^{-3} 秒	3.13 秒
100	1×10^{-6} 秒	6.64×10^{-6} 秒	1×10^{-4} 秒	0.01 秒	1.67 分
1000	1×10^{-5} 秒	9.97×10^{-5} 秒	1×10^{-2} 秒	10 秒	115 日
1 万	1×10^{-4} 秒	1.33×10^{-3} 秒	1 秒	2.78 時間	31 世紀
10 万	1×10^{-3} 秒	0.017 秒	100 秒	115 日	0.21 宙齢

指数時間

入力サイズ n	2^n	$n^2 2^n$	3^n	$n!$
10	2.1×10^{-5} 秒	0.001 秒	5.9×10^{-4} 秒	0.036 秒
20	1.05×10^{-2} 秒	4.19 秒	34.9 秒	771 年
30	10 秒	2.68 時間	23.8 日	5.61×10^{6} 宙齢
40	3.05 時間	204 日	3.68 世紀	1.72×10^{22} 宙齢
50	130 日	893 年	0.015 宙齢	6.42×10^{38} 宙齢
100	26798 宙齢	2.68×10^{8} 宙齢	1.09×10^{22} 宙齢	1.77×10^{132} 宙齢

1 宙齢 =150 億年（ビッグバンから現在までの時間）　　久保，山本 [2] から

$\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ 予想

現時点では，巡回セールスマン問題を多項式時間で解く計算方法は見つかっていない．

さらに，次のような理論体系（計算量理論）がある．

定理　巡回セールスマン問題は **NP** 困難である．

もし巡回セールスマン問題を多項式時間で解く計算方法が見つかれば，それを使って同じように難問とされているたくさんの問題が多項式時間で解けてしまう．

$\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ 予想

現時点では，巡回セールスマン問題を多項式時間で解く計算方法は見つかっていない．

さらに，次のような理論体系（計算量理論）がある．

> **定理**　巡回セールスマン問題は **NP** 困難である．

もし巡回セールスマン問題を多項式時間で解く計算方法が見つかれば，それを使って同じように難問とされているたくさんの問題が多項式時間で解けてしまう．

→それはないだろう．

これは，$\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ 予想とよばれ，アメリカのクレイ数学研究所によって **2000** 年に発表された **100** 万ドルの懸賞金がかけられている７つの数学上の未解決問題の１つ

P ≠ NP 予想

『「難しそうな問題」が本当に難しい.』
これを示すのも難しい....

もし巡回セールスマン問題を多項式時間で解く計算方法が見つかれば，それを使って同じように難問とされているたくさんの問題が多項式時間で解けてしまう.　　　　→それはないだろう.

これは，**P ≠ NP** 予想とよばれ，アメリカのクレイ数学研究所によって **2000** 年に発表された **100** 万ドルの懸賞金がかけられている 7 つの数学上の未解決問題の 1 つ

近似解法

実用的な時間でなるべく短いルートを求める.
平面上の n 都市に対する巡回セールスマン問題も **NP** 困難

日本の **9847** 都市の問題

エジプトの **7146** 都市の問題

TSPBIB[4] から

巡回セールスマン問題の応用例（近似解法を考える意義）

プリント基板の穴をどの順番であけていくか？

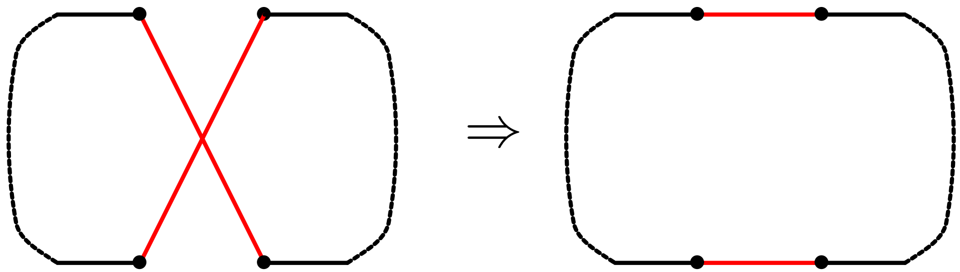
実社会では，数百万，数千万都市の問題を解きたいという要求がある.

付録 — 近似解法 (1)

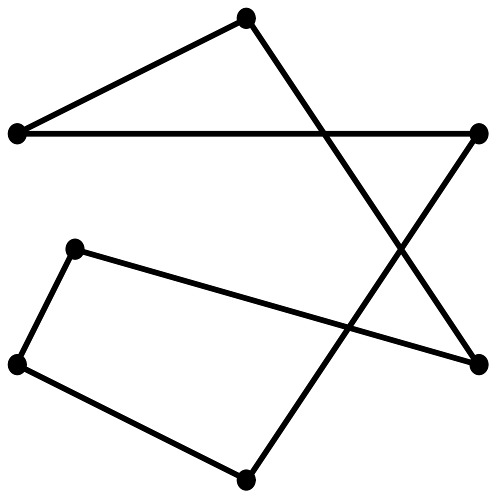
局所探索法

2-OPT：ある解からはじめ，2 辺を交換して値（辺の重みの和）が小さくなるなら，それを新たな解とする．この操作ができなくなるまで繰り返し，解を求める方法.

2 辺の交換操作



例

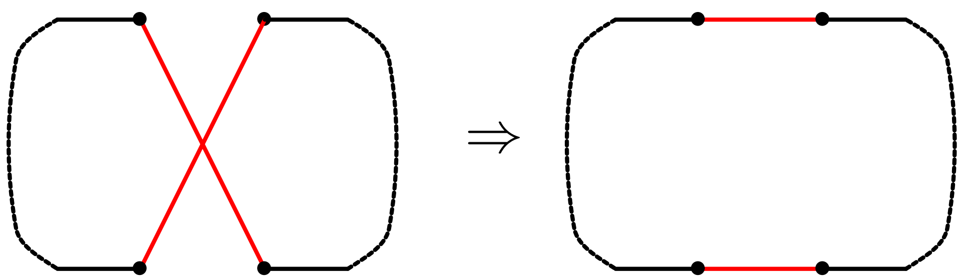


付録 — 近似解法 (1)

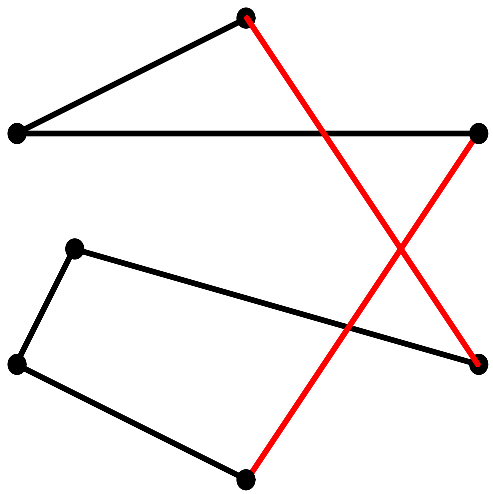
局所探索法

2-OPT：ある解からはじめ，2 辺を交換して値（辺の重みの和）が小さくなるなら，それを新たな解とする．この操作ができなくなるまで繰り返し，解を求める方法.

2 辺の交換操作



例

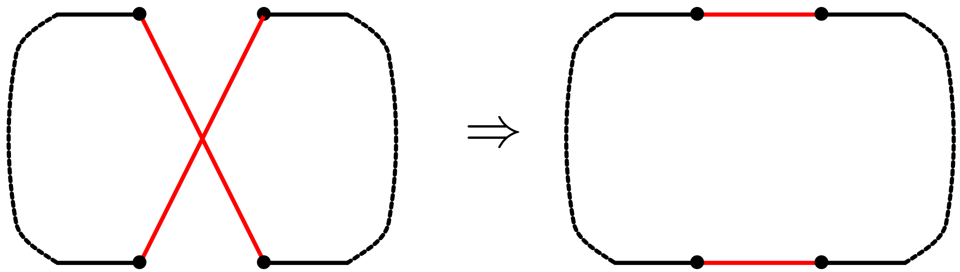


付録 — 近似解法 (1)

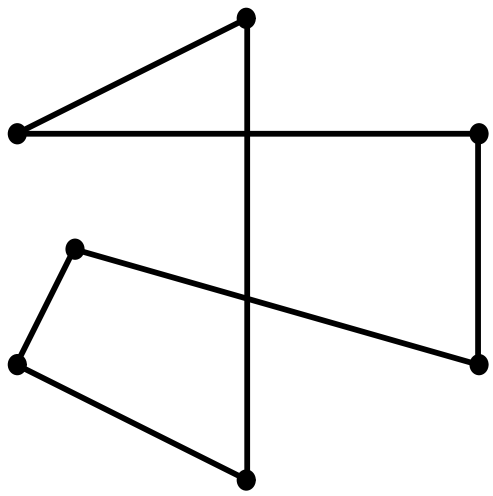
局所探索法

2-OPT：ある解からはじめ，2 辺を交換して値（辺の重みの和）が小さくなるなら，それを新たな解とする．この操作ができなくなるまで繰り返し，解を求める方法．

2 辺の交換操作



例

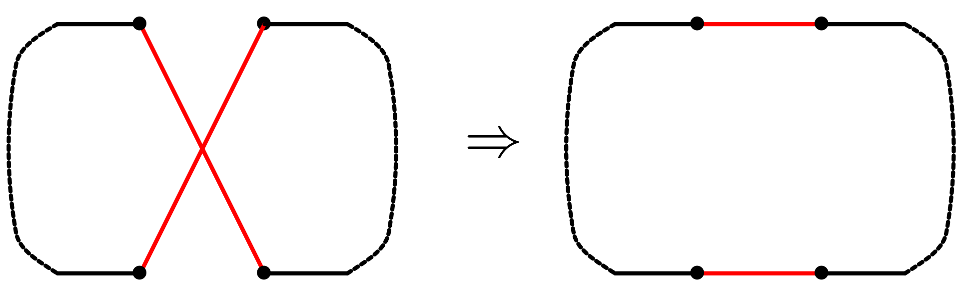


付録 — 近似解法 (1)

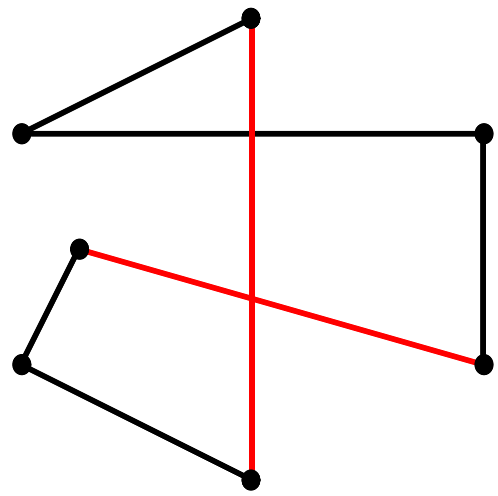
局所探索法

2-OPT：ある解からはじめ，2 辺を交換して値（辺の重みの和）が小さくなるなら，それを新たな解とする．この操作ができなくなるまで繰り返し，解を求める方法．

2 辺の交換操作



例

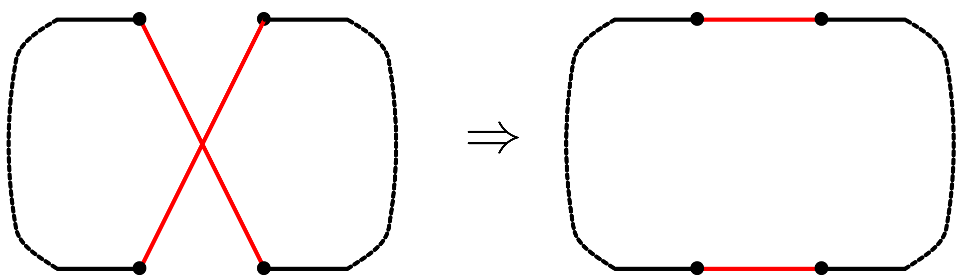


付録 — 近似解法 (1)

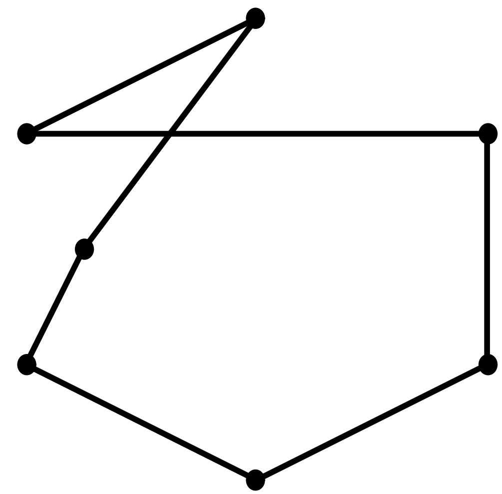
局所探索法

2-OPT：ある解からはじめ，2 辺を交換して値（辺の重みの和）が小さくなるなら，それを新たな解とする．この操作ができなくなるまで繰り返し，解を求める方法.

2 辺の交換操作



例

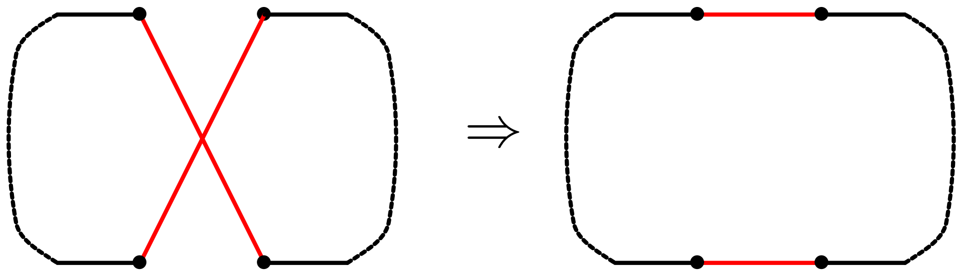


付録 — 近似解法 (1)

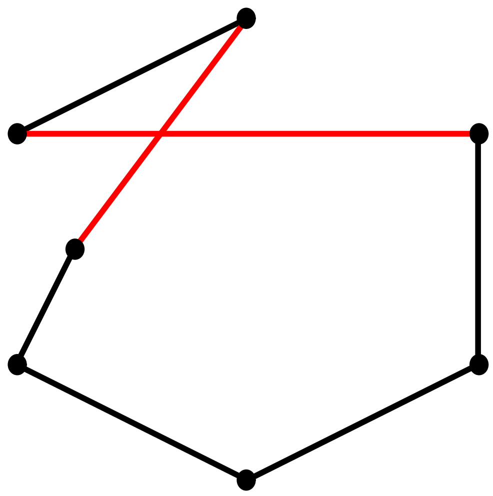
局所探索法

2-OPT：ある解からはじめ，2 辺を交換して値（辺の重みの和）が小さくなるなら，それを新たな解とする．この操作ができなくなるまで繰り返し，解を求める方法．

2 辺の交換操作



例

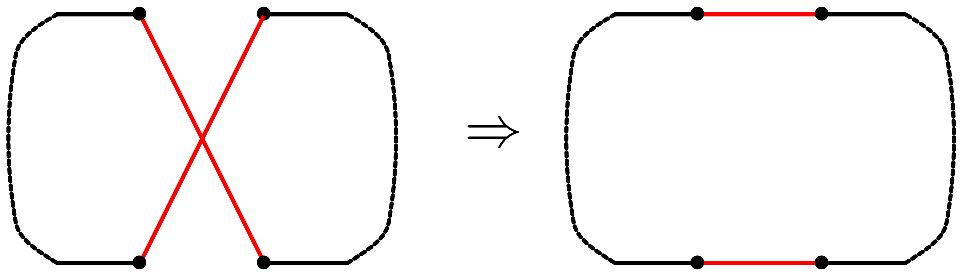


付録 — 近似解法 (1)

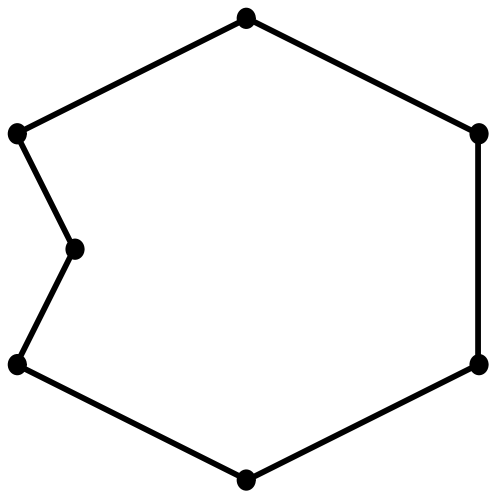
局所探索法

2-OPT：ある解からはじめ，2 辺を交換して値（辺の重みの和）が小さくなるなら，それを新たな解とする．この操作ができなくなるまで繰り返し，解を求める方法.

2 辺の交換操作



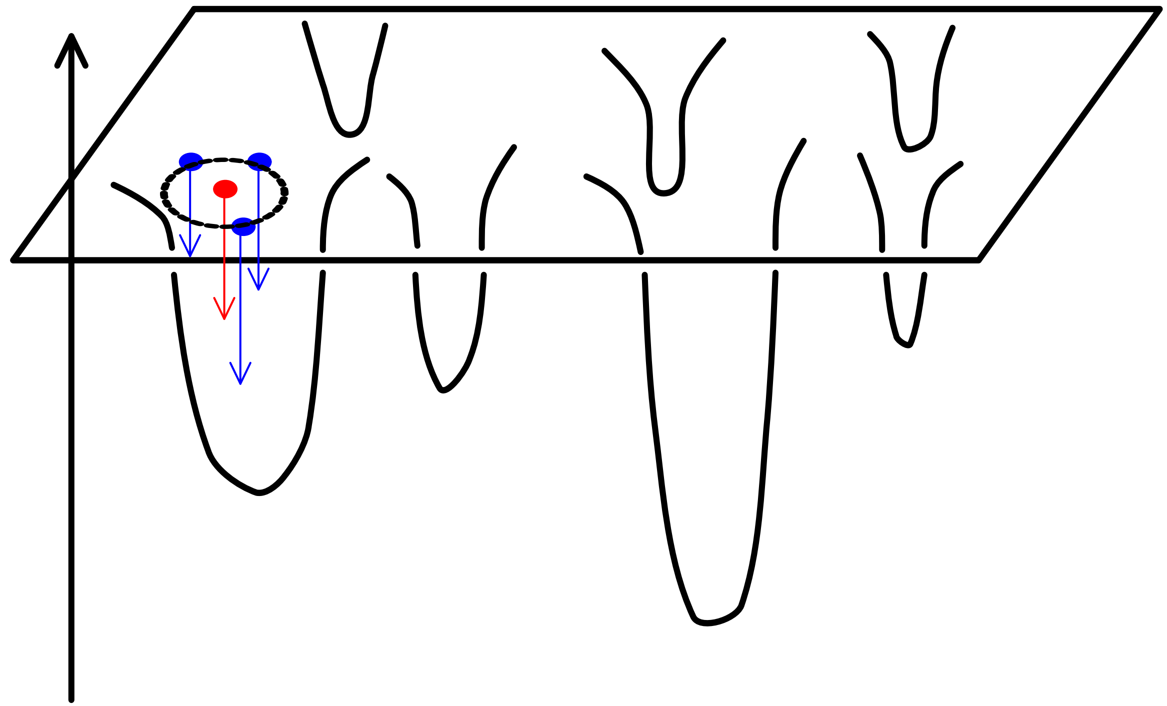
例



メタヒューリスティックス

最適解ではない穴（局所最適解）で終わってしまわないように努力する.

辺の重みの和（大）



- □ シミュレーテッドアニーリング
- □ タブー探索
- □ 遺伝的アルゴリズム

⋮

最後に

参考文献

[1] R. ブランデンベルク, P. グリッツマン著, 石田基広訳, 「最短経路の本」, シュプリンガー (2007).

[2] 久保幹雄, 山本芳嗣, 「巡回セールスマン問題への招待」, 朝倉書店 (1997).

[3] D. L. Applegate, R. E. Bixby, V. Chvátal and W. J. Cook, *The Traveling Salesman Problem - A Computational Study*, **Princeton University Press (2006).**

[4] P. Moscato, *TSPBIB*, `http://www.densis.fee.unicamp.br/~moscato/TSPBIB_home.html`

[5] G. Reinelt, *TSPLIB*, `http://comopt.ifi.uni-heidelberg.de/software/TSPLIB95/`