

RIMS 研究集会  
「解析的整数論 — 超越関数の数論的性質とその応用」  
講演アブストラクト

RIMS Conference  
“Analytic Number Theory Arithmetic Properties of Transcendental Functions  
and their Applications”  
Abstracts of the talks

11月5日(火)

中村 隆 (Takashi Nakamura)

TITLE: **A modified Riemann zeta distribution in the critical strip**

ABSTRACT: Let  $\sigma, t \in \mathbb{R}$ ,  $s = \sigma + it$  and  $\zeta(s)$  be the Riemann zeta function. Put  $f_\sigma(t) := \zeta(\sigma - it)/(\sigma - it)$  and  $F_\sigma(t) := f_\sigma(t)/f_\sigma(0)$ . We show that  $F_\sigma(t)$  is a characteristic function of a probability measure for any  $0 < \sigma \neq 1$  by giving the probability density function. By using this fact, we show that for any  $C \in \mathbb{C}$  satisfying  $|C| > 10$  and  $-19/2 \leq \Re C \leq 17/2$ , the function  $\zeta(s) + Cs$  does not vanish in the half-plane  $1/18 < \sigma$ . Moreover, we prove that  $F_\sigma(t)$  is an infinitely divisible characteristic function for any  $\sigma > 1$ . Furthermore, we show that the Riemann hypothesis is true if each  $F_\sigma(t)$  is an infinitely divisible characteristic function for each  $1/2 < \sigma < 1$ .

Chieh-Yu Chang

TITLE: **Analytic solutions of Frobenius difference equations and transcendence of special values**

ABSTRACT: We will introduce certain Frobenius difference equations and their analytic solutions. We will show some examples such as multizeta values, Carlitz multiple polylogarithms of algebraic points etc, occurring as special values of such analytic solution functions. We will present current progress on transcendence/rationality results and show also how the theory of Frobenius difference equations throws new lights into the transcendence theory of positive characteristic.

三柴 善範 (Yoshinori Mishiba)

TITLE: **Algebraic independence of values of the Carlitz multiple polylogarithms**

ABSTRACT: 通常の多重ポリログの函数体類似として, Carlitz 多重ポリログが定義されます. 正標数の世界では, 重さの異なる Carlitz 多重ポリログの値の間には非自明な線型関係が存在しないことが Chang によって 2012 年に示されています. 本講演ではさらに踏み込んで, Carlitz 多重ポリログの値の代数的独立性について得られた結果を紹介します.

小川 裕之 (Hiroyuki Ogawa)

TITLE: **How should we bet on the prime number dice?**

ABSTRACT: Dirichlet の算術級数定理により, 合同条件を課しても素数の分布が一様であることがわかっています. 例えば素数の列を 7 を法としてみると, 素数 7 を除いて 1 から 6 の数字の並びとなり, 算術級数定理よりどの目も出現確率が同じ均一なサイコロになります. 数値実験を行ったところ, ある種の偏りがあることがわかりました. この偏りについて説明が可能なものと, まだうまく説明できないものがあります. このことについてお話いたします.

吉田 英治 (Eiji Yoshida)

TITLE: **Theta series and a trace of Selberg type**

ABSTRACT: ある特別な Selberg transform に対する Selberg type の trace に対し, 今まで知られていなかった新たな formula を導いたというものである. よく知られているように Selberg trace formula というのは, Selberg がやったように共役類の和に分解して与えられるものである. 今回はその trace がテータ級数と non-holomorphic ポアンカレ級数の積と half-integral weight のアイゼンシュタイン級数との内積 ( $\Gamma_0(4)$  上) で与えられるということを示したい. これは今まで知られていなかった全く新しい formula であり大変興味深いと思われる. Bruggeman-Kuznetsov trace formula が重要な役割を果たしている.

11月6日(水)

**Vichian Laohakosol**

TITLE: **Independence of complex Cantor series and Cantor products**

ABSTRACT: Two representations of each complex number via a Cantor series and a Cantor product are introduced. Criteria for algebraic and linear independence based on these representations are proved. These criteria are derived from two versions of generalized Liouville's theorem about approximation by numbers from a fixed algebraic number field.

**Federico Pellarin**

TITLE: **On  $L$ -series in positive characteristic**

ABSTRACT: The aim of this talk is to present a new way of analytically interpolate “zeta values” in positive characteristic. Here is the simplest example of such a zeta value, after L. Carlitz. We sum all the inverses of monic polynomials of  $\mathbb{F}_q[\theta]$  with  $\theta$  an indeterminate hence defining an element  $\zeta(1)$  of  $\mathbb{F}_q((1/\theta))$ . The analytic interpolating process we introduce for these values puts under a new light the arithmetic properties of Carlitz zeta values. For instance, variants of the functional equation of Riemann's zeta function emerge from our observations. We will discuss recent arithmetical developments of the theory obtained in collaboration with B. Anglès and F. Tavares-Ribeiro.

岡本 卓也 (Takuya Okamoto)

TITLE: **Mean values of Mordell-Tornheim double zeta-functions** (a joint work with Tomokazu Onozuka)

ABSTRACT: Matsumoto and Tsumura proved the mean value theorems for the Euler-Zagier double zeta-function. In this talk, we consider the mean value theorems for the Mordell-Tornheim double zeta-function.

金子 元 (Hajime Kaneko)

TITLE: **Algebraic independence of the power series related to the beta expansions of real numbers**

ABSTRACT: Little is known on the beta expansions of mathematical constants. For instance, the beta expansions of algebraic numbers are mysterious. Applying results on the beta expansions of algebraic numbers, we investigate criteria for the transcendence of certain real numbers. Moreover, developing the criteria, we also study the algebraic independence of the values of power series at certain algebraic points.

**Tünde Lality-Kovács**

TITLE: **Computing  $S$ -integral points on elliptic curves of rank at least 3** (a joint work with Noriko Hirata-Kohno)

ABSTRACT: Let  $E$  be a given elliptic curve defined by the equation

$$y^2 = x^3 + ax + b := q(x).$$

Here  $a, b \in \mathbb{Z}$  and the discriminant of  $q(x)$  is non-zero. By Mordell's theorem,

$$E(\mathbb{Q}) \cong E_{tors}(\mathbb{Q}) \times \mathbb{Z}^r,$$

where  $E_{tors}(\mathbb{Q})$  is the torsion group, and  $r$  is the rank of  $E(\mathbb{Q})$ . Let  $P_1, \dots, P_r$  denote a Mordell-Weil basis of  $E(\mathbb{Q})$ . Then each rational point  $P \in E(\mathbb{Q})$  has a unique representation of the form

$$P = P_0 + n_1 P_1 + \dots + n_r P_r,$$

where  $P_0 \in E_{tors}(\mathbb{Q})$  is a torsion point and  $n_i \in \mathbb{Z}$  ( $i = 1, \dots, r$ ). We fix an arbitrary finite set  $S := \{p_1, \dots, p_{s-1}, \infty\}$  of places of  $\mathbb{Q}$  (including the infinite one). Put  $N := \max_{1 \leq i \leq r} |n_i|_\infty$ . If one searches for the  $S$ -integral points of  $E(\mathbb{Q})$  then first an upper bound for  $N$  has to be found and then this bound has to be gradually decreased to a size where the actual points can already be identified by an exhaustive search. To get the final bound  $N_{final}$  for  $N$ , the LLL-algorithm is applied.

Our aim is to show that for rank  $\geq 3$  elliptic curves, instead of the previous techniques, using the lower bound for linear forms in  $q$ -adic elliptic logarithms established very recently by Hirata-Kohno, we can get a much better upper bound for  $N$ . This point is important in particular if the rank of the elliptic curve is "large", as then already a small improvement of the final bound can considerably shrink the region of possible solutions, and hence the final search can be done much faster.

長尾 孝一 (Koh-ichi Nagao)

**TITLE: Decomposition attack for the DLP of the Jacobian group of a curve over small characteristic field**

**ABSTRACT:** 楕円離散対数問題は一般には、その群位数の  $1/2$  乗の計算量が必要であることが、楕円曲線暗号の安全性の根拠となっている重要な問題である。楕円曲線を含む曲線の Jacobian 群の離散対数問題の分割攻撃は、Semaev, Gaudry, 筆者, 松尾, Diem 等によって研究され、

1. 曲線の種数が 3 より大きい場合、や
2. 定義体が  $\text{OEF}$ (中規模の素数の小さな次数の拡大体) の場合

にその計算量がその群位数の  $1/2$  乗より小さくなることが知られていた。昨年、この分割攻撃に新たな進展がみられた。まず、Faugère らによって、分割攻撃で出てくる Weil descent と呼ばれる操作で作られる多次多変数方程式の次数を下げ、また、多くの式を得るトリックが考案された。このトリックによって、標数が 2 の拡大体上で定義された楕円曲線の離散対数問題が群位数の sub-exponential order まで下がると期待されたが、そのままでは、色々な不具合があり上手く行かなかった。次に、Petit らによって、Fast Fall Degree 仮説という仮説の下で、標数が 2 の拡大体上で定義された楕円曲線の離散対数問題が群位数の sub-exponential order まで下がることが示された。実際にはここで出てくる Fast Fall Degree 仮説はかなり弱い仮説であり、もっと強い仮説が必要と考えられるが、基本的には彼らの考え方は間違っていないように思われる。本講演では、Faugère らによって考えられたトリックが、より一般的な小標数の有限体上で定義された小種数の曲線の Jacobian 群の離散対数問題にも一般化でき、Fast Fall Degree 仮説の下では、この計算量がやはり sub-exponential order まで下がることを示す。

11月7日(木)

小野塚 友一 (Tomokazu Onozuka)

**TITLE: The multiple Dirichlet product and the multiple Dirichlet series**

**ABSTRACT:** 初めに多重化した数論的関数に対して多重 Dirichlet 積を定義し、その積の性質について調べる。その後、多重数論的関数から生成されるゼータ関数について調べ、そのゼータ関数の非零領域などについて論じる。

谷口 隆 (Takashi Taniguchi)

TITLE: **Cubic field discriminants in arithmetic progressions** (a joint work with Frank Thorne)

ABSTRACT: 3 次体の判別式を数える関数は 2 つ主要項があるが, これを算術級数中で数えると, 第 2 主要項には偏りが生じることがある. このことを, 2 元 3 次形式の概均質ベクトル空間の L 関数を使って証明する.

鈴木 正俊 (Masatoshi Suzuki)

TITLE: **An inverse problem for a class of canonical systems**

ABSTRACT: 自己相反多項式の零点分布を, ある 1 階線形微分方程式の正準系の逆問題と結びつけて論ずる. ここで言う逆問題とは, 正準系のスペクトルのデータから正準系のハミルトニアンを復元する問題を言う. 今回扱う場合では, この逆問題が非常に明示的に解ける事を示す.

池田 創一 (Soichi Ikeda)

TITLE: **Mean values of Euler double zeta-functions** (a joint work with Kaneaki Matsuoka and Yoshikazu Nagata)

ABSTRACT: オイラーの二重ゼータ関数の種々の二乗平均値の漸近公式について講演を行う. オイラーの二重ゼータ関数の二乗平均値の研究は, 近年松本と津村により始められたものである. 本講演では

1. 松本と津村の結果の改良
2. 彼らが考察していない平均値に関する諸結果について紹介する.

桂田 昌紀 (Masanori Katsurada)

TITLE: **Asymptotic expansions for certain multiple  $q$ -integrals and  $q$ -differentials of Thmae-Jackson type**

ABSTRACT: We shall present in the talk that complete asymptotic expansions exist for certain multiple  $q$ -integrals and  $q$ -differentials when  $q \rightarrow 1$ . Applications of our main formulae are further shown to deduce complete asymptotic expansions associated with certain  $q$ -analogues of the exponential, the binomial, and the polylogarithmic functions, and further with the generalized Lerch zeta-function.

小松 尚夫 (Takao Komatsu)

TITLE: **Convolution identities for Cauchy numbers**

ABSTRACT: Let  $c_n$  ( $n \geq 0$ ) be the  $n$ -th Cauchy number, defined by the generating function  $x/\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n/n!$ . Explicit expressions for  $(c_l + c_m)^n := \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} c_{l+j} c_{m+n-j}$  are given for arbitrary fixed integers  $l, m \geq 0$ . If  $l = m = 0$ , then  $(c_0 + c_0)^n = -n(n-2)c_{n-1} - (n-1)c_n$ , which was obtained by Zhao. The corresponding expressions for Bernoulli numbers have been studied by several authors, including Agoh and Dilcher. The well-known Euler's formula is given by  $(B_0 + B_0)^n = -nB_{n-1} - (n-1)B_n$ .

平田 典子 (Noriko Hirata-Kohno)

TITLE: **Diophantine approximations related to Polylogarithms**

ABSTRACT: Polylogarithm の無理数性および有理近似について述べる. 特に複素数の場合以外の結果を提供する.