代数学基礎演習 IV

1. $C_{12} = \langle \sigma \mid \sigma^{12} = e \rangle$ を位数 12 の巡回群とする。$C_{12} \rhd \langle \sigma^4 \rangle$ ($\simeq C_3$: 3 次巡回群) に関して剰余群 $C_{12}/\langle \sigma^4 \rangle$ は 4 次巡回群に同型であることを示せ。

2. 四元数群 $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$ に関して次に答えよ。

(i) $Z = \{1, -1\} \lhd Q$ に関する Q の左 Z コセット分割を考え，Q/Z を具体的にかきあげよ。

(ii) 剰余群 Q/Z は $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ あるいは $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ のいずれに同型であるか，Q/Z の乗積表をつくるなどして判定せよ。

3. $\mathrm{SL_n}(\mathbb{R}) = \{\mathrm{g} \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{R}) \mid \det \mathrm{g} = 1\} \lhd \mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ を示せ。剰余群 $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})/\mathrm{SL_n}(\mathbb{R})$ はどのような群に同型であるか？

4. $\mathfrak{S}_4$ を 4 次対称群とする。$V = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ は $\mathfrak{S}_4$ の部分群であることを示せ。また V は $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ あるいは $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ のいずれに同型であるか，理由も述べて判定せよ。

5. (i) 4 次対称群 $\mathfrak{S}_4$ は (12), (23), (34) で生成される（あみだくじ）。この性質を利用して，$V = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ は $\mathfrak{S}_4$ の正規部分群であることを示せ。

(ii) $\mathfrak{S}_4/V$ を具体的にかきあげ，さらに剰余群 $\mathfrak{S}_4/V$ はどんな群に同型であるか記述せよ。

6. (i) 交換子群 $[G, G] \lhd G$ に関する剰余群 $G/[G, G]$ はアーベル群であることを示せ。$G/[G, G]$ を G のアーベル化とよび，G^{ab} とかく。

(ii) $\mathfrak{S}_3^{ab} = \mathfrak{S}_3/[\mathfrak{S}_3, \mathfrak{S}_3]$ はどんな群に同型であるか。

7. $\mathrm{GL_3}(\mathbb{R})$ の部分群 $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R}) \right\}$ の交換子群 $[N, N]$ をもとめよ。N^{ab} はどんな群に同型であるか。

8. 群 G から自身 G への群同型全体がなす集合を $\mathrm{Aut}(G)$ とかく。

(i) $\mathrm{Aut}(G)$ は写像の合成により群になることを示せ（G の自己同型群とよぶ）。

(ii) $g \in G$ に対し $f_g : G \to G$ を $x \mapsto f_g(x) := gxg^{-1}$ で定めるとき，$f_g \in \mathrm{Aut}(G)$ を示せ。

(iii) $\mathrm{Inn}(G) := \{f_g \mid g \in G\}$ とおく。$\mathrm{Inn}(G) \lhd \mathrm{Aut}(G)$ を示せ ($\mathrm{Inn}(G)$ を G の内部自己同型群とよぶ)。

9. (i) 任意の $\rho \in \mathrm{Aut}(G)$ および $x \in G$ に対して，$\rho(x)$ の位数は x の位数に等しいことを示せ。

(ii) $\mathfrak{S}_3$ は (12), (23) によって生成されることおよび (i) で示した性質を利用して，$\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_3) \simeq \mathfrak{S}_3$ を示せ。

10. $H := \{e, (12), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1324), (1423)\}$ は D_4 と同型な $\mathfrak{S}_4$ の位数 8 の部分群であること示せ。

11. (i) 4 変数多項式 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ に対して

$$\mathrm{Sym}(f) := \{\sigma \in \mathfrak{S}_4 \mid f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}) = f(x_1, x_2, x_3, x_4)\}$$

とおく。$\mathrm{Sym}(f)$ は $\mathfrak{S}_4$ の部分群になることを示せ。

(ii) 特に $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ とする。

$$(12),\ (34),\ (12)(34),\ (13)(24),\ \text{また}\ (14)(23) \in \mathrm{Sym}(x_1x_2 + x_3x_4)$$

を確かめよ。

12. ひきつづき上の **11** の設定の下で以下に答えよ。

(i) $H = \{e, (12), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1324), (1423)\} < \mathfrak{S}_4$ とする。部分群の包含列:

$$H < \mathrm{Sym}(x_1x_2 + x_3x_4) < \mathfrak{S}_4$$

に Lagrange の定理を適用し，$\#\mathrm{Sym}(x_1x_2 + x_3x_4) = 8$ または 24 であることを示せ。

(ii) $\mathrm{Sym}(x_1x_2 + x_3x_4) = H$ であることを示せ。

13. 群 G において以下の (i) から (v) の性質は全て互いに同値であることを示せ。

(i) $x \mapsto x^{-1}$ は G の群自己同型写像である。

(ii) $\Delta = \{(x, x) \mid x \in G\} \subset G \times G$ は直積群 $G \times G$ の正規部分群である。

(iii) $(x, y) \mapsto xy$ は直積群 $G \times G$ から G への群準同型である。

(iv) $G/Z(G)$ は巡回群である。

(v) G はアーベル群である。