演習９

I. $C:\ x^2+y^2=1$ を反時計回りに一周するとき

$$I=\int_C (e^x-y^3)dx+(\cos y+x^3)dy$$

の値を計算せよ。

II. C を始点 $(0,0)$ で終点 $(1,1)$ である平面内の任意の曲線とする。このようなすべての C に対して，線積分 $\int_C (x^2+axy+4y^2)dx+(x^2+2a^2xy)dy$ が一定の値をもつように a の値を定めよ。またこのように定めた a に対して実際に $C_0: y=x^2,\ 0\le x\le 1$ に沿った線積分の値を求めよ。

III. D: $x\ge 0,\ y\ge 0,\ x^2+y^2\le 1,$ とする。また整数 $m,\ n\ge 0$ に対して

$$I_{m,n}:=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\theta\sin^n\theta d\theta$$

とおく。$m,\ n\ge 1$ の時に線積分

$$\int_{\partial D} x^m y^n dy$$

を (a) ∂D のパラメータ付けをとって定義通りに，(b) Green の定理を使い D 上の積分に書き直してさらに極座標変換を考えて，の 2 通りで計算し，漸化式

$$I_{m+1,n}=\frac{m}{m+n+1}I_{m-1,n}$$

を導け。また変数変換 $\theta=\frac{\pi}{2}-\theta'$ を考えて $I_{m,n}=I_{n,m}$ を示し，これと上の漸化式を利用して $I_{5,3}$ の値を求めよ。

I. 曲線のパラメータ付けをして線積分を直接計算しようとすると，大変だろう。Green の定理を使えばすぐできる。実際、

$$d((e^x-y^3)dx+(\cos y+x^3)dy)=(3y^2+3x^2)dxdy$$

より

$$I=3\iint_{x^2+y^2\le 1}x^2+y^2\ dxdy$$

極座標変換して値を求めればよい。

II. これは以前にもやった。$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ が条件を満たす (つまり C の境界点のみで値がきまる) とき，$\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$、言い換えればベクトル場 $\mathbf{F} = (P, Q)$ について $\mathrm{rot}\ \mathbf{F} = \partial Q/\partial x - \partial P/\partial y = 0$ が必要条件であった。また $\omega = Pdx + Qdy$ の任意の曲線 C 上の線積分が C の境界点のみで決まる $\Longleftrightarrow$ 任意の閉曲線上の ω の線積分は 0 になる (ただし ω は閉曲線の内部で定義されているとする)，である。この後半の条件にさらにグリーンの定理を合わせると，C: 閉曲線のとき C で囲まれる領域を D とすれば

$$\int_C \omega = \iint_D \quad d\omega = 0$$

つまり $d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0$ であればよく，こうして上で (P, Q) が保存場であると考えて得ていた条件式と同じものが再び得られる。特に P, Q が多項式関数であれば，これは十分にもなる。前半は $a = 2$ が求める値。後半の線積分も，もっと計算のしやすい積分路に変更しても値はかわらないことに注意するとよい。