演習８

I.　線積分の計算をせよ。

(i) $\int_C xdx + ydy$;　C は $(1,0)$ から $(0,2)$ へ向かう線分

(ii) $\int_C xdx + ydy$;　$C = \{(\cos t, 2\sin t) \mid t$ は 0 から$\pi/2$ まで $\}$

II. (i) 線積分

$$\int_C \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

を次の積分路 $C = C_1, C_2, C_3, C_4$ に対して計算せよ。

$C_1 = (\cos t, \sin t)$, t は 0 から $\pi/2$ まで；
C_2 は $(1,0)$ から $(1,1)$ に進み、さらに $(1,1)$ から $(0,1)$ に到る２つの線分をつなげたもの
$C_3 = (\cos t, \sin t)$, t は 0 から π まで（上半円）
$C_4 = (\cos t, -\sin t)$, t は 0 から π まで（下半円）

(ii) 上の線積分で「C_1 と C_2 は始点と終点が一致する積分路でさらに線積分の値が一致する」のに対して,「C_3 と C_4 は始点と終点が一致しているが線積分の値は異なる」という現象がみられる。どうしてこの違いが生じるのか，理由を述べよ。

III. C を実軸上 $(-1,0)$ から $(1,0)$ まで進み，そのあと原点中心半径１の円周を反時計回りに $(1,0)$ から $(-1,0)$ にもどる閉曲線とする。線積分

$$\int_C x^2ydx - xy^2dy$$

を考える。

(i) $\omega = x^2ydx - xy^2dy$ の微分 $d\omega$ を求めよ。

(ii) Green の定理を使って線積分を重積分に書き換えて，その値を計算せよ。

(iii) C のパラメータ付けを適当にとり，線積分を定義定義通り直接計算して (ii) で求めた値と一致することを示せ。

(iv) C_1 を C から実軸にある部分を抜いた曲線 (つまり $(1,0)$ から円周上を $(-1,0)$ まで進む曲線) とする。

$$\int_{C_1} x^2ydx - xy^2dy$$

の値を求めよ。

II. (ii) ベクトル場 $(P(x,y),Q(x,y))=\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2},\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ は，$(0,0)$ では定義されず（実際，(∞,∞) となり発散している），一方で $(0,0)$ 以外では定義されて $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ を満たすことがわかる。よって $(0,0)$ の周りをまわらない閉曲線に沿った線積分の値は 0 となるが，閉曲線が $(0,0)$ の周りをまわるとそれに沿った線積分の値は 0 にならなくても問題なく，実際計算すると 0 になっていないということである。

III. (iii) $(-1,0)$ から $(1,0)$ 上は $\{(t,0)\mid t$ は -1 から 1 まで動く $\}$，残りの円周上は $\{(\cos t,\sin t)\mid t$ は 0 からπまで動く $\}$，とすればよい。

(iv) 実軸上 $(-1,0)$ から $(1,0)$ までの ω の積分はすぐ 0 であることがわかる。これによって今の場合 C_1 上の積分の値は C 上の積分の値に等しい。