演習 7

I.　次の線積分を計算せよ。

(i) $\int_C (x^2+y)dx + xdy;\quad C = \{(t-1,(t-1)^2) \mid 0 \le t \le 3\}$

(ii) $\int_C \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy;\quad C = \{(\cos t, \sin t) \mid 0 \le t \le 2\pi\}$

(iii) $\int_C xdx;\quad C = \{x = y^2 \mid y$ は 1 から 2 までうごく $\}$

II.　次の各曲線 C_i に沿った線積分

$$\int_{C_i} -ydx + xdy$$

を計算せよ。

$C_0 = \{(a\cos t, a\sin t) \mid 0 \le t \le 2\pi\},\ a > 0$：円周、反時計回り

$C_1 = \{(a\cos t, b\sin t) \mid 0 \le t \le 2\pi\},\ a > 0,\ b > 0$：楕円周、反時計回り

$C_2 = (-a,-a),\ (a,-a),\ (a,a),\ (-a,a)\ (a > 0)$ を 4 頂点とする正方形、反時計回り

$C_3 = \{(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2,\ x \ge 0\}$：レムニスケート曲線の右半分、反時計回り

III. (i) 平面内の任意の閉曲線 C に沿った線積分 $\int_C (3ax+2y^2)dx + (6axy+6y)dy$ の値が常に 0 となるように定数 a の値を求めよ。

(ii) (i) で求めた a に対して，次の線積分の値を求めよ：

$$\int_\Gamma (3ax+2y^2)dx + (6axy+6y)dy, \quad \Gamma : x^2+y^2 = 1 \text{ かつ } x \ge 0 \text{ かつ } y \ge 0$$

ただし Γ は $(1,0)$ から $(0,1)$ に向かう向きをつけるものとする。

I. 曲線のパラメータ付けをもちいて計算してみる練習。

方程式で与えられた (iii) の曲線 C は $C = \{(y^2, y) \mid y$ は 1 から 2 までうごく $\}$ ということ。つまり y がパラメータになっている。

II.　まず C_2, C_3 のパラメータ表示:

C_2 は 4 つのパラメトライズされた線分
$\{(t,-a) \mid t$ は $-a$ から a までうごく $\}$ と
$\{(a,t) \mid t$ は $-a$ から a までうごく $\}$ と
$\{(t,a) \mid t$ は a から $-a$ までうごく $\}$ と
$\{(-a,t) \mid t$ は a から $-a$ までうごく $\}$
をつなげたもの.

$C_3 = \{(\sqrt{\cos 2t}\cos t, \sqrt{\cos 2t}\sin t) \mid -\pi/4 \leq t \leq \pi/4\}$. これをつかって定義通りに線積分の式をかいて計算せよ。(後でやる Green の定理を使えば，値を求めるのはこの定義通りの直接計算よりは楽かもしれない)。

III. (i) 多項式関数を成分とするベクトル場 $(3ax+2y^2, 6axy+6y)$ が保存場 (即ちある関数 $f(x,y)$ の勾配ベクトル場 ∇f) になっているという条件を考える：特に $\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$ に対して成り立つ等式

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

が必要条件である。この必要条件

$$\frac{\partial(3ax+2y^2)}{\partial y} = \frac{\partial 6axy+6y}{\partial x}$$

が成立するように定数 a を求めればよい (このときベクトル場の成分は多項式関数で全平面 $\mathbb{R}^2$ で穴なく定義されていることに注意)。

(ii) 直接定義とおりに線積分を計算してもよいが，いまの場合の a の選び方から線積分を考えるベクトル場は勾配ベクトル場なので，始点，終点を保ったまま別の曲線に積分路を取り替えても線積分の値はかわらない。これに注意すれば，たとえば $(1,0)$ から x 軸上を $(0,0)$ まで動き，$(0,0)$ から $(0,1)$ まで動く曲線 (折れ線) に積分路を変更すれば，線積分はとても簡単になる。