演習６

I. 空間内の曲面 $S := \{z = xy \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ を考える。

(i) S の微小部の面積を x, y を使って表せ。

(ii) S の表面積の値を求めよ。

II. 空間内の曲面 $S := \{x^2 + z^2 = 1 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ を考える。

(i) S の微小部の面積を x, y を使って表せ。

(ii) S の表面積の値を求めよ。

III. 空間内の曲面 $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z > 0,\ x^2 + y^2 < 2x\}$ の表面積を計算せよ。

IV. 曲面 $M = \{(x, y, z) \mid (x-1)^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$（円柱面の球内に埋まっている部分）の表面積を計算せよ。

V. 曲面 $S = \{z = x^2 + y^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} = \{(x, y, x^2 + y^2) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ の表面積の値を求めよ。

I. (i) $S = \{(x, y, xy) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, x, y が S のパラメータにとれる。x 方向の変位ベクトル：$r_x := (1, 0, y)\Delta x$ と y 方向の変位ベクトル：$r_y := (0, 1, x)\Delta y$ で囲まれる平行四辺形の面積をかけばよい；

$$
\begin{aligned}
&(S\text{ の微小部の面積})^2 (= |r_x|^2 |r_y|^2 - (r_x \cdot r_y)^2) \\
=&\{(1 + y^2)(1 + x^2) - (yx)^2\}(\Delta x)^2(\Delta y)^2 = (1 + x^2 + y^2)(\Delta x)^2(\Delta y)^2
\end{aligned}
$$

より、$\Delta A = \sqrt{1 + x^2 + y^2}\Delta x \Delta y$

(ii)

$$
\begin{aligned}
A &= \iint_S dA = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dxdy \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r\sqrt{1 + r^2}\,drd\theta = \frac{2\pi(2\sqrt{2} - 1)}{3}.
\end{aligned}
$$

II. (i) $S = \{(x, y, \pm\sqrt{1 - x^2}) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ より 2 つの変位ベクトルは

$r_x = (1, 0, \frac{x}{\sqrt{1-x^2}})\Delta x$ と $r_y = (0, 1, 0)\Delta y$. したがって

$$(\Delta A)^2 = \left(1 + \frac{x^2}{1-x^2}\right)(\Delta x)^2(\Delta y)^2$$

より

$$\Delta A = \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{1-x^2}}$$

(ii) $S = \{(x, y, \sqrt{1-x^2}) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y, -\sqrt{1-x^2}) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ に注意する：

$$\iint_S dA = 2\iint_{x^2+y^2\leq 1} \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2}} = 2\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\right) dx = 8.$$

III. S の定義の最後の条件式 $x^2 + y^2 < 2x$ は $(x-1)^2 + y^2 < 1$ ということ。

$$\begin{aligned} S\text{の表面積} &= \iint_{(x-1)^2+y^2<1} \frac{2dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} \frac{2rdrd\theta}{\sqrt{4-r^2}} = 4(\pi - 2). \end{aligned}$$

IV. (x, z) をパラメータにとってみる。$(x-1)^2 + y^2 = 1$ の陰関数 $y = y(x) = \pm\sqrt{2x-x^2} = y(x, z)$ を考えれば M の点は

$$(x, \sqrt{2x-x^2}, z)$$

とかける。パラメータ (x, z) のうごく範囲は

$$\begin{aligned} &\{\sqrt{\cdot}\text{ の中身 } 2x - x^2 > 0 \text{ かつ } x^2 + (2x - x^2) + z^2 < 4\} \\ &= \left\{0 < x < 2 - \frac{z^2}{2}\right\}. \end{aligned}$$

ここでさらに例えば $y > 0$ の部分の面積を考えて，それを 2 倍すればよい。x 方向の変位ベクトル

$$\left(1, \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}, 0\right),$$

および z 方向の変位ベクトル

$$(0, 0, 1)$$

であるから，M の微小部の面積は

$$\sqrt{1+\frac{(1-x)^2}{2x-x^2}}dxdz=\frac{dxdz}{\sqrt{2x-x^2}}$$

したがって M の表面積 A は

$$A=2\iint_{0<x<2-\frac{z^2}{2}}\frac{dxdz}{\sqrt{2x-x^2}}$$

これを累次積分に書いて値を計算せよ（先に z について積分するようにするとよい）：

$$A=\int_0^2\left(\int_{-\sqrt{4-2x}}^{\sqrt{4-2x}}\frac{dz}{\sqrt{2x-x^2}}\right)dx=\cdots$$

Note: 積分は ” 微小部の量（長さ面積など）” と ” 積分範囲 ” の２つに心をくばって計算することが大事