演習5

I. $D : x > 0$ かつ $y > 0$ かつ $x^4 + y^2 < 1$ に対して

$$\iint_D 2ydxdy$$

の値を求めよ。

II. $D : 0 < y < x$ かつ $(x-1)^2 + y^2 < 1$ に対して

$$\iint_D ydxdy$$

の値を求めよ。

III. $D : 0 \leq y \leq x$ かつかつ $x^2 + y^2 \leq \pi/2$ に対して

$$\iint_D \sin(x^2+y^2)dxdy$$

の値を求めよ。

IV. $D = \{0 < x < y < 2x,\ x < y^2 < 2x\}$ において $\iint_D \frac{y}{x}dxdy$ を考える。$x = u^2v$, $y = uv$ と変数変換するとき，D に対応する uv 平面の領域 D' を具体的にあらわし、かつ I の値を計算せよ。

V. $D : x^2/2 < y < x^2$かつ $y^2 < x < 3y^2$ に対して

$$\iint_D xydxdy$$

の値を求めよ。

VI. $D : 1/4 < x^2 + y^2 < 1$ かつ $0 < y < \sqrt{3}x$ に対して

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}}$$

の値を求めよ。

VII. (i) $\displaystyle\int_0^\infty x^4 e^{-2x^2}dx$ の値を求めよ。

(ii) $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-4x^2+2xy-y^2}dxdy$ の値を求めよ。

VIII. $I=\int_0^1\int_0^1\frac{dxdy}{(1-xy)\sqrt{xy}}$ について答えよ。

(i) $x=u^2\frac{1+v^2}{1+u^2},\ y=v^2\frac{1+u^2}{1+v^2}$ とするとき $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を計算し,

$$I=\iint_{u>0,\ v>0,\ uv<1}\frac{4dudv}{(1+u^2)(1+v^2)}$$

を示せ。

(ii) 変数変換 $u,v\leftrightarrow u^{-1},v^{-1}$ を行って

$$\iint_{u>0,\ v>0,\ uv<1}\frac{dudv}{(1+u^2)(1+v^2)}=\iint_{u>0,\ v>0,\ uv>1}\frac{dudv}{(1+u^2)(1+v^2)}$$

を示せ。

(iii) $I=2\iint_{0<u<\infty,\ 0<v<\infty}\frac{dudv}{(1+u^2)(1+v^2)}$ を示し，I の値を求めよ。

IX. 広義積分

$$I=\iint_{0\leq y\leq x}\frac{\log(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}dxdy$$

の値を求めよ。

I. 重積分は次に等しい：

$$\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x^4}}2ydy\right)dx=\int_0^1(1-x^4)dx=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

II. 極座標変換により重積分は次に等しい：

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\cos\theta}r\sin\theta\cdot rdrd\theta=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\theta\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{8}{12}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2\theta)\sin 2\theta d\theta=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2\theta+\frac{\sin 4\theta}{2}d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\left[-\frac{\cos 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{3}\left[-\frac{\cos 4\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{3}+\frac{2}{12}=\frac{1}{2}$$

$(\cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta)$. あるいは途中から

$$\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3\theta \sin\theta d\theta = \frac{8}{3}\left[-\frac{\cos^4\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{4}+1\right) = \frac{1}{2}$$

と直接計算すればよい。

III. 極座標変換すれば

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \sin r^2 \cdot r dr d\theta = \frac{\pi}{4}\left[-\frac{\cos r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{\pi/2}} = \frac{\pi}{8}$$

IV. [野村，p.193, 問題 7.6]

V. $u = y/(x^2)$, $v = x/(y^2)$ とおくと $D_{u,v} : \frac{1}{2} < u < 1$ かつ $1 < v < 3$ であり $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det\begin{pmatrix} -2y/(x^3) & 1/(x^2) \\ 1/(y^2) & -2x/(y^3) \end{pmatrix} = \dfrac{3}{x^2y^2}$ であるから、

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{x^2y^2}{3} = \frac{1}{3u^2v^2}$$

よって問題の重積分は

$$\iint_{\frac{1}{2}<u<1, 1<v<3} \frac{dudv}{3u^3v^3} = \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{du}{u^3} \cdot \int_1^3 \frac{dv}{v^3}$$

に等しい。

VI. 極座標変換すれば

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{rdrd\theta}{r\sqrt{1-r^2}} \\ &= \frac{\pi}{3}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{\pi}{3}(\arcsin(1) - \arcsin(1/2)) = \frac{\pi}{3}(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6})\end{aligned}$$

VII. (i) $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ （つまり $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ の半分）より $a > 0$ に対して $\int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ である（$t = \sqrt{a}x$ で置換積分）。これを両辺を a で 2 階微分すれば

$$\begin{aligned}&\frac{d^2}{da^2}\int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial a^2}e^{-ax^2}dx = \int_0^\infty x^4 e^{-ax^2}dx \\ =&\frac{d^2}{da^2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{\sqrt{\pi}}{a^{5/2}}\end{aligned}$$

特に $a=2$ を考えれば，求める値は $\frac{3\sqrt{\pi}}{32\sqrt{2}}$ である。

(ii) $4x^2-2xy+y^2=(x\ y)\begin{pmatrix}4 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ である。春学期数学 1A の最後にやったように，回転行列 R によって $\begin{pmatrix}4 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}={}^tR\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}R$ （ここで固有値 α,β は共に正）とかけるので，$\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ と変数変換すると，$4x^2-2xy+y^2=(x\ y){}^tR\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}R\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\alpha u^2+\beta v^2$ とかける。また $dxdy=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv=|\det({}^tR)|dudv=dudv$ (R は回転行列なので $\det R=\det{}^tR=1$ に注意) であるから

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-4x^2+2xy-y^2}dxdy &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\alpha u^2-\beta v^2}dudv\\ &=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}=\frac{\pi}{\sqrt{\det A}}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

として値が求まる。

IX. $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^\infty \frac{\log(1+r^2)}{(1+r^2)^2}rdrd\theta$, $t=r^2$ とおいて $I=\frac{\pi}{4}\int_0^\infty \frac{\log(1+t)}{(1+t)^2}\frac{dt}{2}=\frac{\pi}{8}\left(\left[-\frac{\log(1+t)}{1+t}\right]_0^\infty+\int_0^\infty\frac{dt}{(1+t)^2}\right)=\frac{\pi}{8}$.