演習２

I. 次の xy 平面、あるいは xyz 空間、内の領域に対して、(A) x をとめたら y はどの範囲を動くか、(B) y とめたら x はどの範囲を動くかなど、それぞれ記述せよ（必要に応じて場合分けして）。

(i) D_1：原点 $(0,0)$ 中心で半径 1 の円板の上半分
(ii) $D_2 = \{0 \le x$ かつ $x/2 \le y \le x$ かつ $y \le 3-2x\}$.
(iii) $D_3 := \{0 \le x$ かつ $0 \le y$ かつ $0 \le z$ かつ $x+y+z \le 1\}$.

II. 次の重積分の値を求めよ。

(i) $\iint_D x^2 y dxdy$、ただし D は $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ を 3 頂点とする xy 平面内の三角形の内部.

(ii) $\iint_D x^2 y\ dxdy$, ただし $D = \{0 \le y$ かつ $x^2+y^2 \le 1\}$.

(iii) $\iint_D 2x - y\ dxdy$, ただし $D = \{x \le y \le 2x$ かつ $x+y \le 3\}$.

(iv) $\iint_D \sqrt{x^2+y}\ dxdy$, ただし $D = \{x^2 \le y \le 4-x^2$ かつ $|x| \le \sqrt{2}\}$.

III. 定数関数 $f(x,y)=1$ の領域 D における 2 重積分 $\iint_D dxdy$ は、定義から考えてすなわち ”D の面積” を与えるということになる。積分計算して面積を出してみよう。

(i) 半径 r の円 $D = \{x^2+y^2 \le r^2\}$ の面積

(ii) 楕円 $D = \{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\}$ $(a,b>0)$ の面積

IV. $D = \{1 \le x \le \sqrt{3}$ かつ $x \le y \le x^2\}$ の時

$$\iint_D \frac{x}{x^2+y^2} dxdy$$

の値を求めよ。

V. 次の重積分の値を求めよ.

$D = \{0 \le x \le 1$ かつ $0 \le y \le 1-x^2\}$

$$\iint_D 2xe^{(1-y)^2} dxdy$$

VI. $D = \{0 \le x \le 1$ かつ $x \le y \le 1\}$ とする。

(i) $\displaystyle\iint_D e^{ay^2} dxdy$ $(a \ne 0)$ の値を求めよ。

(ii) $\iint_D y^2 e^{ay^2}dxdy$ $(a \neq 0)$ の値を求めよ。

I. (i) x をとめると y は 0 から $\sqrt{1-x^2}$ まで動く (x は -1 から 1 まで動く)。y をとめると x は $-\sqrt{1-y^2}$ から $\sqrt{1-y^2}$ まで動く (y は 0 から 1 まで動く)。

(ii) D_2 は 3 本の直線で囲まれた領域。$0 \leq x \leq 1$ の範囲で x をとめると y は $\frac{x}{2}$ から x まで動く。$1 \leq x \leq \frac{6}{5}$ の範囲で x をとめると y は $\frac{x}{2}$ から $3-2x$ まで動く。図示も用いて確かめよう。

(iii) D_3 は次のように組み合わせて考えるとよい：x, y をとめると z は 0 から $1-x-y$ まで動く、x をとめると y は 0 から $1-x$ まで動く、x は 0 から 1 まで動く。

II. (iii) は

$$\int_0^1 \Big(\int_x^{2x} (2x-y)dy\Big)dx + \int_1^{\frac{3}{2}} \Big(\int_x^{3-x} (2x-y)dy\Big)dx$$

と計算できる。累次積分に書きなおす際は、積分領域をこのように適当に分けて考えて、各所で個別に考えて、それらを全部足せばよい。

III. (i) πr^2 (ii) πab; 実際に面積を重積分で表しそれを累次積分を用いて計算してこれらの値が得られることを確認せよ。

IV. $\int_1^{\sqrt{3}} \left(\int_x^{x^2} \frac{x}{x^2+y^2}dy\right) dx = \int_1^{\sqrt{3}} \left[\arctan \frac{y}{x}\right]_{y=x}^{y=x^2} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \arctan x - \frac{\pi}{4}dx = [x \arctan x]_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x}{x^2+1}dx - \frac{\sqrt{3}-1}{4}\pi = \frac{\sqrt{3}\pi}{12} - \frac{1}{2}[\log(1+x^2)]_1^{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{12} - \frac{1}{2}\log 2.$

V. (i) 先に y をとめて x について 0 から $\sqrt{1-y}$ まで積分し、そのあと y について 0 から 1 まで積分するとよい。答えの値は $\frac{1}{2}(e-1)$.

(ii)

$$\iint_D \sqrt{1+y^3}dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} \sqrt{1+y^3}dx\right) dy = \cdots = \frac{2}{9}(2\sqrt{2}-1).$$

VI. (i) まず x について積分し、あとで y について積分するような順序の累次積分で書いてみると計算が進む。(ii) (i) の積分と得た値について両辺を a で微分すると、、、。