演習 1

I. 不定積分を求めよ。

$$\int \frac{x+1}{2x^2+5x-3}dx$$

(ヒント：$2x^2+5x-3$ を 1 次式の積に因数分解し、それをもとに部分分数分解して考える。)

II. (i) 部分分数分解を考えて不定積分を求めよ：$\dfrac{2x^2-x+3}{(x-1)^2(x-2)}$

(ii) $\dfrac{x^3+2x^2-x+1}{(x-1)^4}$ の不定積分を求めよ.

III. 次の有理関数の不定積分を求めよ:

(i) $\dfrac{1}{x^2+3}$ (ii) $\dfrac{2x}{x^2-2x+2}$ (iii) $\dfrac{1}{x^2-2x+3}$

IV. 不定積分を求めよ:

(i) $\dfrac{x^2-x-4}{(x-1)(x^2-2x+5)}$ (ii) $\dfrac{x^3-5x^2-5x+1}{(x-1)^2(x^2+2x+5)}$

V. 次の積分の値を求めよ。

(i) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (ii) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$

VI. 不定積分を求めよ：

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{3+2\cos x}$ (ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x}$ (iii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$

VII. 不定積分を求めよ：

(i) $\int \arctan x dx$ (ii) $\int \log(x+\sqrt{1+x^2})$

I. $\dfrac{x+1}{(2x-1)(x+3)} = \dfrac{\frac{3}{7}}{2x-1} + \dfrac{\frac{2}{7}}{x+3}$ より $\dfrac{3}{14}\log(2x-1) + \frac{2}{7}\log(x+3)$.

II. (i) $\dfrac{A}{(x-1)^2}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x-2}$ の形に部分分数分解できる。通分して分子が $A(x-2)+B(x-1)(x-2)+C(x-1)^2=2x^2-x+3$ となるように $A,\ B,\ C$ を決めたい。$x=2$ を代入すると $C=8-2+3=9$, $x=1$ を代入すると $-A=2-1+3=4$ より $A=-4$ と求まる。$-4(x-2)+B(x-1)(x-2)+9(x-1)^2=2x^2-x+3$ の 2 次の係数を比較して $B=-7$ とでる。検算して確かめるとよい。不定積分は $\dfrac{4}{x-1}-7\log(x-1)+9\log(x-2)$.

(ii) $x^3+2x^2-x+1=(x-1+1)^3+2(x-1+1)^2-(x-1+1)+1=(x-1)^3+3(x-1)^2+3(x-1)+1+2(x-1)^2+4(x-1)+2-(x-1)-1+1$ と考えて分子を $x-1$ の多項式にまとめ直せば

$$\frac{x^3+2x^2-x+1}{(x-1)^4}=\frac{3}{(x-1)^4}+\frac{6}{(x-1)^3}+\frac{5}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}$$

とかける。それぞれのパーツの不定積分は容易に求まる.

III. (i) の有理式を $\frac{1}{3}\frac{1}{1+(x/\sqrt{3})^2}$ と変形。これの不定積分は $\frac{1}{3}\sqrt{3}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}$.

(ii) の式を $\frac{2x-2+2}{x^2-2x+2}=\frac{(x^2-2x+2)'}{x^2-2x+2}+\frac{2}{(x-1)^2+1}$ のように変形してみれば、不定積分は $\log(x^2-2x+2)+2\arctan(x-1)$.

(iii) の式は $\frac{1}{(x-1)^2+2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\frac{(x-1)^2}{2}}$ で不定積分は $\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\arctan\left(\dfrac{x-1}{\sqrt{2}}\right)$.

IV. (i) $\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2-2x+5}$ の形に部分分数分解できる。通分した分子 $A(x^2-2x+5)+(Bx+C)(x-1)=x^2-x-4$ となるようにしたい。$x=1$ を代入して $4A=-4$ より $A=-1$ とでる。これから $(Bx+C)(x-1)=x^2-x-4+x^2-2x+5=2x^2-3x+1$ より定数項と 2 次項をみて $B=2$, $C=-1$ がわかる（1 次の項もこれでＯＫ）。検算して確かめるとよい。不定積分は $-\log(x-1)+\log(x^2-2x+5)+\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$

(ii) $\dfrac{x^3-5x^2-5x+1}{(x-1)^2(x^2+2x+5)}=\dfrac{A}{(x-1)^2}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+2x+5}$ と分解できる。$A=-1,\ B=-1,\ C=2,\ D=1$ となる。求める不定積分は

$$\frac{1}{x-1}-\log(x-1)+\log(x^2+2x+5)-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

V. (i) $[\arcsin x]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$.

(ii) $[\arctan x]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$.

VI. (i) $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ (これは $t = \tan\frac{x}{2}$ ということになる) とおけば，積分は

$$\int \frac{1}{3+2\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = \frac{2}{5}\int \frac{dt}{1+(\frac{t}{\sqrt{5}})^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right)$$

で x の関数として書き直せば，$\frac{2}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\tan\frac{x}{2}\right)$ である。

(ii), (iii) は実際練習してみればよいが，とくに (ii) は $t = \tan x$ と置いたほうが計算自体はよりやりやすいだろう。$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ (つまり $t = \tan\frac{x}{2}$) と置換すればかならず出来るわけだが，それが”最善”かどうかはそのとき次第（それほどすごい違いはないけれど)。
(ii) $t = \tan x$ としてやってみると

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \frac{1+t^2}{t^2}\frac{dt}{1+t^2} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{\tan x}$$

(iii) は $t = \tan\frac{x}{2}$ を使うと

$$\int \frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{1-t} + \int \frac{dt}{1+t} = -\log\left(1-\tan\frac{x}{2}\right) + \log\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)$$

VII. $\int \log x dx = x\log x - \int \frac{x}{x}dx = x\log x - x$ と同じように部分積分で計算すればよい。
(i) $x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$
(ii) $x\log(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = x\log(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$.

Notes

有理関数 $f(x) = \dfrac{x\text{ の多項式}}{x\text{ の多項式}} = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ の不定積分の求め方は

(1): 分母の多項式 $q(x)$ を因数分解する、

(2): (1) の因数分解に沿って $f(x)$ を部分分数分解する、

(3): (2) ででた各部分分数式のパーツの不定積分をもとめる、

という流れで進行する。こまかくいうと、

まず (1) では $q(x)$ はいくつかの $(x-a)^k$, $(x^2+bx+c)^l$ という形の因子の積として分解できる；

また (2) の結果、$f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ は

いくつかの $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $\dfrac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^l}$ という形の有理式とあと多項式の和

に分解されることがわかる。

$\dfrac{A}{(x-a)^k}$ の不定積分はもちろんよくわかり，$\dfrac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^l}$ のほうも $l=1$ なら講義で説明したようにやればよい。$l\geq 2$ のときはうまく部分積分を考えて、$l>l'$ の場合の和に帰着できるので、結局各パートの不定積分はかならず求まる。このあたり証明までこめて例えば野村隆昭，微分積分学講義，第 5.5 節に書いてある。第 5.6 節も見よ。