

I. $D = \{0 \leq y \leq \sqrt{3}x, x^2 + y^2 \leq 2x\}$, $A = \iint_D dx dy$ の値を求めよ。

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{2\cos\theta} r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\cos^2\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 1 + \cos 2\theta d\theta = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

II. $D = \left\{\frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}, 0 < y < 1\right\}$ に対して $I = \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{(1-x)(1-xy^2)}}$ を考える。

(i) 変数変換 $x = u^2, y = \frac{v}{u}$ に関して $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ を求めよ。

(ii) I を u, v の重積分に書き換えよ。

(iii) I の値を求めよ (計算を進めて適当な時に $u = \sin t$ とおくとよい)。

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} 2u & 0 \\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{pmatrix}\right| = 2$$

で D は $\{0 \leq v \leq u, \frac{1}{2} \leq u \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\}$ と 1:1 対応。

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\int_0^u \frac{2dv}{\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}} \right) du = 2 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\arcsin u}{\sqrt{1-u^2}} du$$

$u = \sin t, du = \cos t dt$, とすると $\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{3}$ で $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$ より

$$I = 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} t dt = \frac{\pi^2}{12}.$$

あるいは直接

$$I = [\arcsin^2 u]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{36} = \frac{\pi^2}{12} \quad \left(\frac{d}{du} \arcsin^2 u = \frac{2 \arcsin u}{\sqrt{1-u^2}} \right).$$