

練習問題 9 (関数方程式概論)

1 次の 1 次元空間における Green–Naghdi 方程式系を考える.

$$\begin{cases} \eta_t + ((h + \eta)u)_x = 0 \\ u_t + uu_x + g\eta_x = (3(h + \eta))^{-1}((h + \eta)^3(u_{xt} + uu_{xx} - u_x^2))_x \end{cases}$$

ただし, h, g は正定数であり, $\eta = \eta(x, t), u = u(x, t)$ が未知関数である. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 上記 Green–Naghdi 方程式系を自明解 (零解) の周りで線形化せよ.
- (2) (1) で導出した線形化方程式系に対する分散関係式および対応する波の位相速度を求めよ.

2 次の 1 次元空間における方程式系を考える.

$$\begin{cases} \eta_t + (H\phi_x + \frac{1}{3}H^3\psi_x)_x = 0 \\ H^2\eta_t + (\frac{1}{3}H^3\phi_x + \frac{1}{5}H^5\psi_x)_x - \frac{4}{3}H^3\psi = 0 \\ \phi_t + H^2\psi_t + g\eta + \frac{1}{2}\phi_x^2 + \frac{1}{4}H^4\psi_x^2 + H^2\phi_x\psi_x + 2H^2\psi^2 = 0 \\ H = h + \eta \end{cases}$$

ただし, h, g は正定数であり, $\eta = \eta(x, t), \phi = \phi(x, t), \psi = \psi(x, t)$ が未知関数である. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 上記方程式系を自明解 (零解) の周りで線形化せよ.
- (2) (1) で導出した線形化方程式系に対する分散関係式および対応する波の位相速度を求めよ.