

練習問題 8 (関数方程式概論)

- 1 次の 1 次元双曲型保存則を考える.

$$u_t + f(u)_x = 0$$

ただし, $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ である. u_∞ を定数とすると, $u = u_\infty$ は一つの解である. 上の方程式をこの定数定常解の周りで線形化せよ.

- 2 次の非圧縮性粘性流体に対する Navier–Stokes 方程式を考える.

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \nu \Delta \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

\mathbf{u}_∞ を定数ベクトル, p_∞ を定数とすると, $(\mathbf{u}, p) = (\mathbf{u}_\infty, p_\infty)$ は一つの解である. 上の Navier–Stokes 方程式をこの定数定常解の周りで線形化せよ.

- 3 次の非線形 Schrödinger 方程式を考える.

$$iu_t + \Delta u + |u|^2 u = 0$$

a を任意の複素定数, $\phi(t) = ae^{i|a|^2 t}$ とするとき, $u(x, t) = \phi(t)$ は一つの解である. 上の非線形 Schrödinger 方程式をこの解の周りで線形化せよ.