

練習問題 5 (関数方程式概論)

- 1 周期境界条件の下で, 次の $u(x, t)$ ($x \in \mathbf{R}, t > 0$) に対する KdV 方程式を考える.

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + u_{xxx} &= 0, & x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u(x+1, t) &= u(x, t), & x \in \mathbf{R}, t > 0. \end{aligned} \tag{0.1}$$

$u(x, t)$ を (0.1) の滑らかな解とするとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 任意の自然数 n に対して, 次式が成り立つことを示せ.

$$(\partial_x^n u)(1, t) = (\partial_x^n u)(0, t), \quad t > 0$$

- (2) 以下の積分量が時間に依らない保存量であることを示せ.

- (i) $\int_0^1 u(x, t) dx$
- (ii) $\int_0^1 (u(x, t))^2 dx$
- (iii) $\int_0^1 \left\{ (u_x(x, t))^2 - \frac{1}{3} (u(x, t))^3 \right\} dx$