

練習問題 4 (関数方程式概論)

- 1 次の $u = u(x, t)$ ($x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, t > 0$) に対する熱伝導方程式を考
える.

$$u_t = \kappa \Delta u \quad (0.1)$$

ただし, κ は正定数である. また, 関数 $u(x, t)$ および $\lambda > 0$ に対して, 関数 $u_\lambda(x, t)$ を $u_\lambda(x, t) := \lambda^n u(\lambda x, \lambda^2 t)$ で定める. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) u が熱伝導方程式 (0.1) の解であれば, u_λ も熱伝導方程式 (0.1) の解であり, 次式が成り立つこと (すなわち, 総熱量が不変であること) を示せ.

$$\int_{\mathbf{R}^n} u_\lambda(x, t) dx = \int_{\mathbf{R}^n} u(x, \lambda^2 t) dx$$

- (2) 任意の $\lambda > 0$ に対して $u_\lambda = u$ を満たす熱伝導方程式 (0.1) の解 u を自己相似解と呼ぶ. (0.1) の自己相似解 u で x に関して球対称であるような解は, 半直線上 $[0, \infty)$ の関数 $\phi(r)$ を用いて, $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}^n} \phi\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)$ と書けることを示し, さらに $\phi(r)$ が満たす常微分方程式を導け.
- (3) 熱伝導方程式 (0.1) の x に関して球対称であるような自己相似解で, かつ $x = 0$ で滑らかであるものを全て求めよ.