

練習問題 2 (関数方程式概論)

1 次の  $u = u(x, t)$  に対する熱方程式の初期値-境界値問題を考える.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(x, t) & x > 0, t > 0, \\ u = \varphi(t) & x = 0, t > 0, \\ u = u_0(x) & x > 0, t = 0. \end{cases}$$

ただし,  $f \in C^\infty([0, \infty) \times [0, \infty))$ ,  $\varphi, u_0 \in C^\infty([0, \infty))$  とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) この初期値-境界値問題の解  $u$  で  $u \in C^0([0, \infty) \times [0, \infty))$  を満たすもの (i.e.,  $x = 0, t = 0$  まで込めて連続である解) が存在するための必要条件を求められるだけ求めなさい.
- (2) この初期値-境界値問題の解  $u$  で  $u \in C^2([0, \infty) \times [0, \infty))$  を満たすもの (i.e.,  $x = 0, t = 0$  まで込めて  $u$  およびその 1 階と 2 階の偏導関数が全て連続である解) が存在するための必要条件を求められるだけ求めなさい.
- (3) この初期値-境界値問題の解  $u$  で  $u \in C^\infty([0, \infty) \times [0, \infty))$  を満たすもの (i.e.,  $x = 0, t = 0$  まで込めて  $u$  およびその全ての偏導関数が連続である解) が存在するための必要条件を求められるだけ求めなさい.