

練習問題 1 1 (関数方程式概論)

1 \mathbf{R}^n 上の関数 $f(x)$ が $|x|$ にのみ依存するとき, すなわち, ある半直線 $[0, \infty)$ 上の関数 $\varphi(r)$ を用いて $f(x) = \varphi(|x|)$ と書けるとき, 関数 $f(x)$ は球対称であるという. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) \mathbf{R}^n 上の関数 $f(x)$ が球対称であるための必要十分条件は, 任意の $x \in \mathbf{R}^n$ および任意の $T \in O(n)$ に対して $f(Tx) = f(x)$ が成り立つこと, であることを示せ. ただし, $O(n)$ は n 次の直交群である.
- (2) $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ が球対称であるとき, $f(x)$ の Fourier 変換 $\hat{f}(\xi)$ もまた球対称であることを示せ.