

練習問題 7 (応用解析第 1)

1  $f(x)$  を区分的に連続な  $2\pi$ -周期関数とし,  $A_n$  を  $f(x)$  の (複素形式の) Fourier 係数とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 任意の三角多項式  $\sum_{n=-N}^N B_n e^{inx}$  に対して, 次の不等式が成り立つことを示せ:

$$\int_0^{2\pi} \left| f(x) - \sum_{n=-N}^N B_n e^{inx} \right|^2 dx \geq \int_0^{2\pi} \left| f(x) - \sum_{n=-N}^N A_n e^{inx} \right|^2 dx$$

(2) (1) の結果および Fejér の定理を用いて, 任意の  $2\pi$ -周期連続関数に対して Parseval の等式が成り立つことを示せ.

2 (1)  $f(x)$  を  $2\pi$ -周期連続関数とし,  $a_n, b_n$  を  $f(x)$  の Fourier 係数とする. このとき, Parseval の等式を  $a_n, b_n$  を用いて書き表わせ.

(2)  $f(x) = x^2$  ( $-\pi \leq x < \pi$ ) の Fourier 級数および Parseval の等式を用いて, 級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$  の和を求めよ.