

練習問題 5 (応用解析第 1)

1 以下の 2π -周期関数 $f(x)$ を Fourier 級数に展開せよ.

(1) $f(x) = \cos ax, \quad -\pi \leq x < \pi \quad (a \notin \mathbf{Z})$

(2) $f(x) = e^{ax}, \quad -\pi \leq x < \pi \quad (a \neq 0)$

2 $l > 0$ とし, $f(x)$ は原点において微分可能な $[-l, l]$ 上の連続関数であるとする. このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(x) \frac{\sin nx}{x} dx = f(0)$$

が成り立つことを示せ.

(Hint: $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ および Riemann の補題を用いよ.)