練習問題 6 (関数方程式概論) Jun. 4, 2020 (Thu.)

$\boxed{1}$ 周期境界条件の下で，次の $u(x,t)$ $(x \in \mathbf{R}, t > 0)$ に対する非線形 Schrödinger 方程式を考える．

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}u_t + u_{xx} + |u|^2 u = 0, \quad x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ &u(x+1,t) = u(x,t), \quad\ \ x \in \mathbf{R}, t > 0. \end{aligned} \tag{0.1}$$

$u(x,t)$ を (0.1) の滑らかな解とするとき，以下の量が時間に依らない保存量であることを示せ．ただし，$\Im z$，$\overline{z}$ は，それぞれ複素数 z の虚部，複素共役を表わす．

(1) $\displaystyle\int_0^1 |u(x,t)|^2 \mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \Im\big(\overline{u(x,t)}u_x(x,t)\big)\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \Big(|u_x(x,t)|^2 - \frac{1}{2}|u(x,t)|^4\Big)\mathrm{d}x$