練習問題 1 (関数方程式概論)　　　　Apr. 30, 2020 (Thu.)

$\boxed{1}$ $c \in \mathbf{R}$ および $f, g \in C^2(\mathbf{R})$ に対して，関数 $u = u(x,t)$ $(x, t \in \mathbf{R})$ を

$$u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

で定義する．このとき，u は次の 1 次元波動方程式を満たすことを示せ．

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}.$$

$\boxed{2}$ $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ 上の関数 $E = E(x)$ $(x = (x_1, x_2, \ldots, x_n))$ を

$$E(x) = \begin{cases} \log|x| \quad (= \log\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) & \text{if} \quad n = 2, \\ |x|^{2-n} \quad (= (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{(2-n)/2}) & \text{if} \quad n \geq 3 \end{cases}$$

で定義する．このとき，E は次の Laplace 方程式を満たすことを示せ．

$$\Delta E = 0.$$

$\boxed{3}$ $\kappa > 0$ とする．$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ および $t > 0$ の関数 $G = G(x,t)$ を

$$G(x,t) = \frac{1}{(4\kappa t)^{n/2}} \mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4\kappa t}}$$

で定義する．このとき，G は次の熱方程式を満たすことを示せ．

$$G_t = \kappa \Delta G.$$