練習問題 7 (応用解析第 1)　　　　Jun. 16, 2019 (Tue.)

$\boxed{1}$ $f(x)$ を区分的に連続な 2π-周期関数とし，A_n を $f(x)$ の（複素形式の）Fourier 係数とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 任意の三角多項式 $\displaystyle\sum_{n=-N}^{N} B_n \mathrm{e}^{inx}$ に対して，次の不等式が成り立つことを示せ：

$$\int_0^{2\pi} \left| f(x) - \sum_{n=-N}^{N} B_n \mathrm{e}^{inx} \right|^2 dx \geq \int_0^{2\pi} \left| f(x) - \sum_{n=-N}^{N} A_n \mathrm{e}^{inx} \right|^2 dx$$

(2) (1) の結果および Fejér の定理を用いて，任意の 2π-周期連続関数に対して Parseval の等式が成り立つことを示せ．

$\boxed{2}$ (1) $f(x)$ を 2π-周期連続関数とし，a_n, b_n を $f(x)$ の Fourier 係数とする．このとき，Parseval の等式を a_n, b_n を用いて書き表わせ．

(2) $f(x) = x^2$ $(-\pi \leq x < \pi)$ の Fourier 級数および Parseval の等式を用いて，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ の和を求めよ．