

- 1 任意の自然数  $n, m$  に対して、次式が成り立つことを示せ.

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \sin mx \, dx = 0$$
$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \pi \delta_{nm}$$

ただし、 $\delta_{nm}$  は Kronecker のデルタである.

- 2  $f(x)$  を区分的に連続な  $2\pi$ -周期関数とし、 $a_n, b_n$  を  $f(x)$  の Fourier 係数とする. すなわち、

$$\begin{cases} a_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx, & n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx, & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

このとき任意の実数  $\alpha$  に対して、Fourier 係数  $a_n, b_n$  は次のようにも表わせることを示せ.

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \cos nx \, dx, & n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \sin nx \, dx, & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$