練習問題１１ (数学解析第１)　　　　Jul. 3, 2019 (Wed.)

$\boxed{1}$ 次の線積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\oint_C y^2 \mathrm{d}s$ ； C は領域 $\{(x,y)\,;\, x^2+y^2<1,\ x>0\}$ の境界

(2) $\displaystyle\int_C (xy+yz+zx)\mathrm{d}s$ ； $C : x=t, y=1-t, z=t^2\ (0\le t\le 1)$

$\boxed{2}$ C は原点 $(x,y)=(0,0)$ を中心とする単位円周で，原点を左に見て周るように向き付けられているとし，

$$\boldsymbol{u}(x,y) = \big(u_1(x,y), u_2(x,y)\big) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

とする．このとき，

(1) ベクトル場 $\boldsymbol{u}$ の C 上の線積分 $\displaystyle\int_C u_1\mathrm{d}x + u_2\mathrm{d}y$ を計算せよ．

(2) 以下の議論の間違いを指摘せよ：

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial y}(x,y) = -\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

より

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial u_1}{\partial y}(x,y) \equiv 0$$

したがって，B を原点を中心とする単位円の内部（C の内部）とすると Green の定理より

$$\int_C u_1\mathrm{d}x + u_2\mathrm{d}y = \iint_B \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

休講のお知らせ

７月１７日（水）の数学解析第１の講義は休講とします．