

- 1 周期境界条件の下で, 次の $u(x, t)$ ($x \in \mathbf{R}, t > 0$) に対する非線形 Schrödinger 方程式を考える.

$$\begin{aligned} iu_t + u_{xx} + |u|^2u &= 0, & x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u(x+1, t) &= u(x, t), & x \in \mathbf{R}, t > 0. \end{aligned} \tag{0.1}$$

$u(x, t)$ を (0.1) の滑らかな解とすると, 以下の量が時間に依らない保存量であることを示せ. ただし, $\Im z$, \bar{z} は, それぞれ複素数 z の虚部, 複素共役を表わす.

$$(1) \int_0^1 |u(x, t)|^2 dx$$

$$(2) \int_0^1 \Im(\overline{u(x, t)} u_x(x, t)) dx$$

$$(3) \int_0^1 \left(|u_x(x, t)|^2 - \frac{1}{2} |u(x, t)|^4 \right) dx$$