数学解析第 1　第 5 回講義ノート

定理 3.3（Lagrange の未定乗数法）Ω を $\mathbf{R}^n$ の領域，f および $\boldsymbol{g} = (g_1, \ldots, g_m)$ を Ω で定義された C^1 級関数とし，$S := \{\boldsymbol{x} \in \Omega \,|\, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\}$ とおく．このとき，

(1)　f は $\boldsymbol{a} \in S$ において S 上極値をとり
(2)　$\mathrm{rank}\,(D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})) = m\ (\leq n)$

ならば，ある $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbf{R}^m$ が存在し

$$Df(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{\lambda} D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$$

が成り立つ．この最後の式は，次式と同値である．

$$\big(\nabla(f + \lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_m g_m)\big)(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$$

注意　(1)　$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ を Lagrange 乗数とよぶ．
(2)　この定理より，条件

$$g_1(\boldsymbol{x}) = \cdots = g_m(\boldsymbol{x}) = 0$$

の下で $f(\boldsymbol{x})$ の極値点の候補 $\boldsymbol{a}$ を見つけるためには，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\lambda})$ に対する連立方程式

$$\begin{cases} \big(\nabla(f + \lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_m g_m)\big)(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0} \\ g_1(\boldsymbol{a}) = \cdots = g_m(\boldsymbol{a}) = 0 \end{cases}$$

を解けばよい．ただし，より正確に述べると，定理の条件 (2) を満たさない場合，すなわち行列 $D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})$ がフルランクをもたない場合には，定理 3.3 は適用できないので，そのような点は個別に調べる必要がある．

証明　簡単のために，$m = 1$ の場合のみ証明しよう．一般の m の場合も，記号の煩雑さが伴うものの，基本的には同様にして証明される．$m = 1$ の場合には，

$$Dg(\boldsymbol{a}) = (g_{x_1}(\boldsymbol{a}), \ldots, g_{x_n}(\boldsymbol{a}))$$

であるから，定理の仮定 (2) は $Dg(\boldsymbol{a}) \neq \mathbf{0}$ と同値である．このとき，必要であれば x_j の順番を入れ替えることにより，一般性を失うことなく

$$g_{x_n}(\boldsymbol{a}) \neq 0$$

と仮定してよい．ここで，

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{y}, z), \qquad \boldsymbol{y} := (x_1, \ldots, x_{n-1}), \qquad z := x_n \\ &\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{b}, c), \qquad \boldsymbol{b} := (a_1, \ldots, a_{n-1}), \qquad c := a_n \end{aligned}$$

という記号を導入しよう．このとき，

$$g(\boldsymbol{b}, c) = 0 \quad \text{かつ} \quad g_z(\boldsymbol{b}, c) \neq 0$$

が成り立っている．したがって，陰関数定理を適用することができ，十分小さな正定数 δ, r および $\varphi \in C^1(B_r(\boldsymbol{b}))$ が存在し，$\varphi(\boldsymbol{b}) = c$，および $\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}\| < r, |z - c| < \delta$ を満たす任意の $(\boldsymbol{y}, z)$ に対して，

$$g(\boldsymbol{y}, z) = 0 \Leftrightarrow z = \varphi(\boldsymbol{y})$$

が成り立つ．すなわち，点 $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{b}, c)$ の近傍において，集合 S は $z = \varphi(\boldsymbol{y})$ という超曲面で表わされている．さらに，$g(\boldsymbol{y}, \varphi(\boldsymbol{y})) = 0$ の両辺を $\boldsymbol{y}$ で微分することにより，

$$\nabla\varphi(\boldsymbol{y}) = -\big(g_z(\boldsymbol{y}, \varphi(\boldsymbol{y}))\big)^{-1}(\nabla_{\boldsymbol{y}} g)(\boldsymbol{y}, \varphi(\boldsymbol{y}))$$

が得られる．ここで，$F(\boldsymbol{y}) := f(\boldsymbol{y}, \varphi(\boldsymbol{y}))$ とおくと，仮定より F は $B_r(\boldsymbol{b})$ で定義された C^1 級関数であり，$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ において極値をとっている．したがって，定理 3.1 より

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{0} = \nabla F(\boldsymbol{b}) &= (\nabla_{\boldsymbol{y}} f)(\boldsymbol{b}, \varphi(\boldsymbol{b})) + f_z(\boldsymbol{b}, \varphi(\boldsymbol{b}))\nabla\varphi(\boldsymbol{b}) \\
&= (\nabla_{\boldsymbol{y}} f)(\boldsymbol{b}, c) - f_z(\boldsymbol{b}, c)\big(g_z(\boldsymbol{b}, c)\big)^{-1}(\nabla_{\boldsymbol{y}} g)(\boldsymbol{b}, c) \\
&= (\nabla_{\boldsymbol{y}} f)(\boldsymbol{a}) - f_z(\boldsymbol{a})\big(g_z(\boldsymbol{a})\big)^{-1}(\nabla_{\boldsymbol{y}} g)(\boldsymbol{a})
\end{aligned}$$

となる．ここで，

$$\lambda := -f_z(\boldsymbol{a})\big(g_z(\boldsymbol{a})\big)^{-1}$$

とおけば，上式および λ の定義式自身から

$$\begin{cases} (\nabla_{\boldsymbol{y}} f)(\boldsymbol{a}) + \lambda(\nabla_{\boldsymbol{y}} g)(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0} \\ f_z(\boldsymbol{a}) + \lambda g_z(\boldsymbol{a}) = 0 \end{cases}$$

が得られ，これらをまとめれば $\big(\nabla(f + \lambda g)\big)(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ となる．（証明終）

この定理は，条件付き極値問題の極値点の候補を見つける方法を示しているのであり，見つけた点が実際に極値点であるかどうかは，個別に確かめなければならない．通常の極値問題の場合には，極値点の候補は，定理 3.1 により停留点として計算することができた．条件付き極値問題の場合には，この停留点の計算に相当する部分が，定理 3.3 に述べてある Lagrange の未定乗数法なのである．具体例を見ることで，このことを理解して頂きたい．

例 3.2 $g(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy, f(x, y) = x^2 + y^2$ とし，条件 $g(x, y) = 0$ の下で $f(x, y)$ の極値問題を考えよう．まず，Lagrange の未定乗数法が適用できないような点について調べる．

$$Dg(x, y) = (3(x^2 - y), 3(y^2 - x))$$

であるから，$Dg(x, y) = 0$ を解くと，$x^2 = y$ かつ $y^2 = x$．これより，$x^4 = x$ となり，$x = 0, 1$ が従う，したがって，$Dg(x, y) = 0$ となる点は

$$(x, y) = (0, 0), (1, 1)$$

の 2 点のみである．ところが，$g(1, 1) = -1 \neq 0$ より，点 $(1, 1)$ は条件を満たさないので，対象外である．点 $(0, 0)$ は条件を満たすが，この点は明らかに関数 $f(x, y)$ の最小点である．次に，$(x, y) \neq (0, 0)$ を条件 $g(x, y) = 0$ の下での $f(x, y)$ の極値点であるとすると，上の考察から

$$Dg(x, y) \neq \boldsymbol{0} \qquad \therefore \quad \operatorname{rank} Dg(x, y) = 1$$

したがって，Lagrange の未定乗数法が適用できて，ある実数 λ が存在し

$$(\nabla(f+\lambda g))(x,y)=\mathbf{0}$$

が成り立つ．これを成分で書くと，次のようになる．

$$2x+3\lambda(x^2-y)=0 \tag{3.2}$$

$$2y+3\lambda(y^2-x)=0 \tag{3.3}$$

また，(x,y) は条件 $g(x,y)=0$ を満たす点であるから

$$x^3+y^3-3xy=0 \tag{3.4}$$

(3.2) および (3.3) 式から λ を消去するために，$(3.2)\times(y^2-x)/2-(3.3)\times(x^2-y)/2$ を計算すると

$$\begin{aligned}
0&=x(y^2-x)-y(x^2-y)\\
&=(xy^2-yx^2)+(y^2-x^2)\\
&=xy(y-x)+(y-x)(y+x)\\
&=(y-x)(xy+x+y)
\end{aligned}$$

したがって，

$$y=x \qquad \text{あるいは} \qquad xy+x+y=0$$

Case 1. $y=x$ の場合：　このとき，(3.4) より $2x^3-3x^2=0$．いま $(x,y)\neq(0,0)$ と仮定しているので，$x\neq 0$ であるから，$x=\frac{3}{2}$．したがって，$(x,y)=(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$.

Case 2. $xy+x+y=0$ の場合：　このとき，(3.4) より

$$\begin{aligned}
0&=(x^3+y^3-3xy)+3(xy+x+y)\\
&=x^3+y^3+3(x+y)\\
&=(x+y)(x^2-xy+y^2+3)
\end{aligned}$$

ここで，$x^2-xy+y^2+3=\frac{1}{2}\big((x-y)^2+x^2+y^2\big)+3>0$ であるから，上式より $x+y=0$ となるが，このとき $x=y=0$ となる．したがって，いまの場合 (3.4) を満たす $(x,y)\neq(0,0)$ は存在しない．

以上のことから，原点以外の点で，条件 $g(x,y)=0$ の下での $f(x,y)$ の極値点の候補として $(x,y)=(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ が求まった．いま求めた点が極値点になっているかどうかは，Lagrange の未定乗数法からは何も分からないが，その証明を反省すれば，どのように判定したらよいかが分かるであろう．それを以下で見ていこう．

$$g(\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2})=0 \quad \text{および} \quad g_y(\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2})=3\big((\tfrac{3}{2})^2-\tfrac{3}{2}\big)=\tfrac{9}{4}\neq 0$$

より陰関数定理を適用することができ，十分小さな正定数 δ,r および $\varphi\in C^\infty\big((\frac{3}{2}-r,\frac{3}{2}+r)\big)$ が存在し，$\varphi(\frac{3}{2})=\frac{3}{2}$，および $|x-\frac{3}{2}|<r,|y-\frac{3}{2}|<\delta$ を満たす任意の (x,y) に対して，

$$g(x,y)=0\Leftrightarrow y=\varphi(x)$$

が成り立つ．すなわち，点 $(x,y)=(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ の近傍において，条件 $g(x,y)=0$ を満たす点 (x,y) の集合は $y=\varphi(x)$ という曲線で表わされている．さらに，$g(x,\varphi(x))=0$ の両辺を x で微分することにより，

$$g_x(x,\varphi(x))+g_y(x,\varphi(x))\varphi'(x)=0$$

および

$$g_{xx}(x,\varphi(x))+2g_{xy}(x,\varphi(x))\varphi'(x)+g_{yy}(x,\varphi(x))\bigl(\varphi'(x)\bigr)^2+g_y(x,\varphi(x))\varphi''(x)=0$$

が得られる．これより，

$$\varphi'(\tfrac{3}{2})=-1,\qquad \varphi''(\tfrac{3}{2})=-\tfrac{32}{3}$$

が得られる．ここで，

$$F(x):=f(x,\varphi(x))=x^2+\bigl(\varphi(x)\bigr)^2$$

とおくと，仮定より F は開区間 $(\frac{3}{2}-r,\frac{3}{2}+r)$ で定義された C^∞ 級関数であり，$F(x)$ が $x=\frac{3}{2}$ で極値をとることと，条件 $g(x,y)=0$ の下で関数 $f(x,y)$ が極値をとることとは同値になる．さらに，$F(x)$ の極値の判定には定理 3.2 を用いればよい．いまの場合，

$$F'(\tfrac{3}{2})=2\bigl(\tfrac{3}{2}+\varphi(\tfrac{3}{2})\varphi'(\tfrac{3}{2})\bigr)=0,\qquad F''(\tfrac{3}{2})=2\bigl(1+\bigl(\varphi(\tfrac{3}{2})\bigr)^2+\varphi(\tfrac{3}{2})\varphi''(\tfrac{3}{2})\bigr)=-28<0$$

であるから，$x=\frac{3}{2}$ において極大になっていることが分かる．

以上のことをまとめると，条件 $g(x,y)=0$ のもとで，関数 $f(x,y)$ は $(x,y)=(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ において極大になり，$(x,y)=(0,0)$ において極小（最小）になることが分かった．それ以外には，極値点はない．

注意 条件 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$ を満たす点の集合 S が有界閉集合（コンパクト集合）であれば，関数 $f(\boldsymbol{x})$ は集合 S 上で必ず最大値と最小値をもつ．このような場合，もし単に最大値と最小値を求めたいだけであれば，まず Lagrange の未定乗数法を用いて，それらの値を与える点の候補 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_N$ を全て求める．それから，わざわざ上の例のようにして確認しなくても，$f(\boldsymbol{a}_1),f(\boldsymbol{a}_2),\dots,f(\boldsymbol{a}_N)$ の値を計算してそれらの値を比較すれば最大値と最小値が求まる．なぜならば，必ずそれらの値の中に最大値と最小値が含まれているからである．ただし，上の例のように集合 S が非有界集合の場合には，そのような手法は適用できず，例のように地道に計算することになる．