数学解析第１　第３回講義ノート

例 2.2　$f(x,y) = xe^y - y^2 + e^x$ とおき，x をパラメーターと見て y についての方程式

$$f(x,y) = 0$$

を解くことを考えよう．$x = 0$ のとき，$f(0,y) = -y^2 + 1 = 0$ は $y = \pm 1$ という解を持つ．以下では，$(x,y) = (0,1)$ の近傍を考えよう．$f(x,y)$ は明らかに $\mathbf{R}^2$ で定義された C^∞ 級関数であり，$f_y(x,y) = xe^y - 2y$ より

$$f(0,1) = 0 \quad \text{および} \quad f_y(0,1) = -2 \neq 0$$

が成り立つ．したがって，陰関数定理が適用でき，（十分小さな）正定数 r と開区間 $(-r,r)$ で定義された C^∞ 級関数 $\varphi(x)$ が存在し，

$$f(x,\varphi(x)) = 0 \quad (|x| < r) \quad \text{および} \quad \varphi(0) = 1$$

が成り立つ．

　陰関数定理は，このような陰関数 $\varphi(x)$ の存在を保証してくれるものであるが，それがどのような関数であるかは何も述べていない．それだと何も意味がないのではないかと思う諸君もいるかと思うが，陰関数 $\varphi(x)$ の滑らかさは保障されているので，Taylor 展開できることが分かる．すなわち，任意の自然数 m に対して

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k + O(x^{m+1}) \qquad (x \to 0)$$

が成り立つ．ここで，もし微分係数 $\varphi^{(k)}(0)$ が計算できれば，$x = 0$ の近傍で陰関数 $\varphi(x)$ の振る舞いや近似値が求められることになる．

　次に，この微分係数を求めてみよう．陰関数定理より，$\varphi(0) = 1$ であることは分かっている．等式 $f(x,\varphi(x)) = 0$ の両辺を x で微分すると，

$$f_x(x,\varphi(x)) + f_y(x,\varphi(x))\varphi'(x) = 0 \tag{2.3}$$

となるが，この式において $x = 0$ とおくと $\varphi(0) = 1$ より

$$f_x(0,1) + f_y(0,1)\varphi'(0) = 0$$

ここで，上で既に計算したように $f_y(0,1) = -2$ であり，$f_x(x,y) = e^y + e^x$ より，$f_x(0,1) = e + 1$ である．したがって，

$$\varphi'(0) = \frac{e+1}{2}$$

次に，(2.3) の両辺を再度 x で微分すると，

$$f_{xx}(x,\varphi(x)) + 2f_{xy}(x,\varphi(x))\varphi'(x) + f_{yy}(x,\varphi(x))(\varphi'(x))^2 + f_y(x,\varphi(x))\varphi''(x) = 0$$

となるが，この式において $x = 0$ とおくと $\varphi(0) = 1$ より

$$f_{xx}(0,1) + 2f_{xy}(0,1)\varphi'(0) + f_{yy}(0,1)(\varphi'(0))^2 + f_y(0,1)\varphi''(0) = 0$$

ここで，$f_{xx}(x,y)=e^x, f_{xy}(x,y)=e^y, f_{yy}(x,y)=xe^y-2$ より，$f_{xx}(0,1)=1, f_{xy}(0,1)=e, f_{yy}(0,1)=-2$ である．したがって，

$$\varphi''(0)=\frac{1}{2}\left(1+2e\frac{e+1}{2}-2\left(\frac{e+1}{2}\right)^2\right)=\frac{e^2+1}{4}$$

以上のことから，次式が得られる．

$$\varphi(x)=1+\frac{e+1}{2}x+\frac{e^2+1}{8}x^2+O(x^3) \qquad (x\to 0)$$

このような操作を繰り返せば，原理的には高階の微分係数 $\varphi^{(k)}(0)$ も計算することができ，陰関数 $\varphi(x)$ の高次展開を得ることが可能である．

上では，最も簡単な 2 変数関数に対する陰関数定理を紹介したが，次にこの定理を多変数関数に拡張することを考えよう．$\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n$ および $\boldsymbol{y}=(y_1,\ldots,y_m)\in\mathbf{R}^m$ の関数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(f_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\ldots,f_m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$ が与えられているとき，$\boldsymbol{y}$ を未知数とする連立方程式

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\mathbf{0} \tag{2.4}$$

を考えよう．ベクトル記号を使わず，成分で書けば次のようになる．

$$\begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)=0 \\ f_2(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)=0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ f_m(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)=0 \end{cases}$$

ここで，未知数 $\boldsymbol{y}=(y_1,\ldots,y_m)$ と方程式の個数がともに m 個で等しいことに注意しよう．線形代数で勉強して来たように，線形の連立方程式のときでも未知数の個数と方程式の個数が等しくない場合には，解が存在しなかったり，解が無限個存在したりする場合があった．ここでは，線形の場合を含むもっと一般の方程式を考えているので，未知数の個数と方程式の個数が一致する場合を考えるのは自然であろう．

さて問題は，上記の連立方程式が $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})=(\varphi_1(\boldsymbol{x}),\ldots,\varphi_m(\boldsymbol{x}))$ という形で解けるか？解けるための条件は何か？ということである．先の 2 変数関数の場合には，グラフを書くことによってその条件を直感的に理解することができた．しかし，今の場合のような多変数関数となると，グラフを書くことはできないので，別な方法でその条件を見つけ出そう．陰関数定理（定理 2.1）に引き続いて，陰関数 φ の導関数が f の導関数を使って書き下した．それが可能なためには $f_y(x,\varphi(x))\neq 0$ でなければならないが，これが $x=a$ のときに成立している，というのが陰関数定理の本質的な仮定 $f_y(a,b)\neq 0$ であった．したがって，いま探し求めている条件というのは，陰関数の導関数が計算可能であることを保証する条件であることが予想される．それを見つけていこう．そこで，C^1 級の陰関数 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ が存在したとすると，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}))=\mathbf{0}$，すなわち，

$$f_i(x_1,\ldots,x_n,\varphi_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\varphi_m(x_1,\ldots,x_n))=0 \qquad (1\leq i\leq m)$$

が成り立つ．この両辺を x_j で微分し，合成関数の微分法を用いれば

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}))+\frac{\partial f_i}{\partial y_1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}))\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})+\cdots+\frac{\partial f_i}{\partial y_m}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}))\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})=0$$

が得られる．これを行列を用いて書けば，次のようになる．

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_m}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial y_1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial y_m}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) \end{pmatrix}$$

この左辺の係数行列は j に無関係な行列であることに注意しよう．この式より，陰関数 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ の偏導関数 $\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})$ $(1 \le j \le n)$ が求まるためには，この係数行列が正則であればよい．これが求める条件であろう．以上のことを考慮して次の定義をしよう．

定義 2.1　Ω を $\mathbf{R}^n$ の領域，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}),\dots,f_m(\boldsymbol{x}))$ $(\boldsymbol{x} = (x_1,\dots,x_n) \in \Omega)$ を Ω で定義された C^1 級の関数とする．

(1)　$m \times n$ 行列値関数

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

を $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ の Jacobi 行列あるいは単に微分といい，$D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}), \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})$ などと書く．

(2)　$m = n$ のとき，Jacobi 行列 $D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ の行列式を Jacobian といい，$J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}) := \det\bigl(D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\bigr)$ と書く．

また，関数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ に対して，$\boldsymbol{y}$ を固定し，$\boldsymbol{x}$ の関数と見たときの Jacobi 行列を $D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$，$\boldsymbol{x}$ を固定し，$\boldsymbol{y}$ の関数と見たときの Jacobi 行列を $D_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ と書くことにしよう．すなわち，

$$D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \end{pmatrix}$$

および

$$D_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_m}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial y_1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial y_m}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \end{pmatrix}$$

以上の準備の下，多変数関数に対する一般の陰関数定理を紹介しよう．

定理 2.2（陰関数定理）　Ω を $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ の領域，$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \in \Omega$ $(\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^m)$，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (f_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\dots,f_m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^m)$ を Ω で定義された C^1 級関数とする．このとき，

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0} \quad \text{および} \quad \det\bigl(D_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\bigr) \neq 0 \tag{2.5}$$

ならば，方程式 (2.4) は $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ のある近傍で $\boldsymbol{y}$ について一意に解ける．すなわち，（十分小さな）正定数 r, δ および $\boldsymbol{a}$ を中心とする半径 r の開球 $B_r(\boldsymbol{a}) := \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < r\}$ で定義された C^1 級関数 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = (\varphi_1(\boldsymbol{x}),\dots,\varphi_n(\boldsymbol{x}))$ が存在し，以下の性質を満たす．

(1)　$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) = \mathbf{0}$, $\|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}\| < \delta$ $(\boldsymbol{x} \in B_r(\boldsymbol{a}))$,　$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}$
(2)　$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathbf{0}, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < r, \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}\| < \delta \Rightarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$
(3)　$D\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = -\big((D_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}))\big)^{-1}(D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}))$
(4)　$\boldsymbol{f}$ が C^k 級（$k \geq 2$）ならば，陰関数 $\boldsymbol{\varphi}$ もまた C^k 級

ここでも陰関数定理の証明で最も困難なのは，C^1 級の陰関数が唯一つ存在することを示すことである．一旦，陰関数の存在が示されてしまえば，等式

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) = \mathbf{0}$$

の両辺の $\boldsymbol{x}$ に関する Jacobi 行列を計算すれば，合成関数の微分法より

$$(D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) + (D_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}))D\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = O$$

が得られる．これを $D\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ について解けば (3) が従う．さらに，この (3) を用いれば，k に関する帰納法により (4) が容易に示される．この陰関数定理の仮定でもっとも重要な条件は (2.5) の後者の条件である．連立方程式 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathbf{0}$ を $\boldsymbol{y}$ について解くためには，$\boldsymbol{y}$ に関する Jacobian が零ではないことを確認すればよい，と覚えておくとよいであろう．

この定理の証明は後に紹介することにして，この定理の使い方を説明しよう．

例 2.3　$f(x, y, z) = x + y + z$ および $g(x, y, z) = e^x + e^{2y} + e^{3z} - 3$ とし，連立方程式

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

を (x, y) について解くことを考えよう．

$z = 0$ のとき，$(x, y) = (0, 0)$ が解になることは明らかである．また，f, g は明らかに C^∞ 級関数であり，

$$\det\begin{pmatrix} f_x(0,0,0) & f_y(0,0,0) \\ g_x(0,0,0) & g_y(0,0,0) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

したがって，陰関数定理が適用でき，（十分小さな）正定数 r と開区間 $(-r, r)$ で定義された C^∞ 級関数 $\varphi(z), \psi(z)$ が存在し，

$$f(\varphi(z), \psi(z), z) = g(\varphi(z), \psi(z), z) = 0 \quad (|z| < r), \qquad \varphi(0) = \psi(0) = 0$$

が成り立つ．すなわち，連立方程式 (2.6) は $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ の近傍で (x, y) について一意に解くことができ，その解が $(x, y) = (\varphi(z), \psi(z))$ で与えられる．この解の $z = 0$ の近傍における振る舞いを調べるためには，例 2.2 と同様にして，陰関数 $\varphi(z), \psi(z)$ を Taylor 展開すればよい．そのためには，これら陰関数の $z = 0$ における微分係数を求めればよい．

等式 $f(\varphi(z), \psi(z), z) = g(\varphi(z), \psi(z), z) = 0$ を z で微分した後，$z = 0$ を代入すると，$\varphi(0) = \psi(0) = 0$ より

$$\begin{cases} f_x(0,0,0)\varphi'(0) + f_y(0,0,0)\psi'(0) + f_z(0,0,0) = 0 \\ g_x(0,0,0)\varphi'(0) + g_y(0,0,0)\psi'(0) + g_z(0,0,0) = 0 \end{cases}$$

すなわち，

$$\begin{pmatrix} f_x(0,0,0) & f_y(0,0,0) \\ g_x(0,0,0) & g_y(0,0,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi'(0) \\ \psi'(0) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_z(0,0,0) \\ g_z(0,0,0) \end{pmatrix}$$

が成り立つ．これより，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \varphi'(0) \\ \psi'(0) \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} f_x(0,0,0) & f_y(0,0,0) \\ g_x(0,0,0) & g_y(0,0,0) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_z(0,0,0) \\ g_z(0,0,0) \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって，Taylor の定理より

$$\varphi(z) = z + O(z^2), \quad \psi(z) = -2z + O(z^2) \qquad (z \to 0)$$

が得られる．同様にして，高次の展開も計算することができる．