数学解析第１　第１３回講義ノート

定義 7.6 (面積分)　Ω を $\mathbf{R}^3$ の領域，f を Ω で定義された連続関数，A を Ω 内の C^1 級曲面で

$$A:\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(u,v) = (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v), \varphi_3(u,v)) \qquad ((u,v) \in D)$$

とパラメーター表示されているとする．ただし，D は $\mathbf{R}^2$ の領域である．(A が C^1 級であるとは，このパラメーター表示にあらわれる関数 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ が C^1 級であることを意味する.)
このとき，f の A 上の面積分を次式で定める．

$$\iint_A f \mathrm{d}S := \iint_D f(\boldsymbol{\varphi}(u,v)) \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(u,v) \right\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

面積分にあらわれる $\mathrm{d}S$ は曲面 A の面積要素と呼ばれており，形式的には

$$\mathrm{d}S = \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(u,v) \right\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

と書かれる．この表示にあらわれている外積を計算してみよう．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial u} \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial v} & \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{vmatrix} \\
&= \boldsymbol{e}_1 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial u} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial v} & \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{vmatrix} + \boldsymbol{e}_2 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial v} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v} \end{vmatrix} + \boldsymbol{e}_3 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u} \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial(\varphi_2, \varphi_3)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(\varphi_3, \varphi_1)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(u,v)} \right)
\end{aligned}$$

したがって，

$$\mathrm{d}S = \sqrt{\left(\frac{\partial(\varphi_2, \varphi_3)}{\partial(u,v)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(\varphi_3, \varphi_1)}{\partial(u,v)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(u,v)} \right)^2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

と書くこともできる．

さて，曲面のパラメーター表示は一通りではなく，一般に何通りもある．また，人によって異なるパラメーター表示を使ったりする．上で定義した面積分もまた線積分と同じように，実はどんなパラメーター表示を使っても同じ値になり，関数 f と曲面 A からだけで決まることが確かめられる．実際，

$$A:\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\psi}(r,s) = (\psi_1(r,s), \psi_2(r,s), \psi_3(r,s)) \qquad ((r,s) \in E)$$

という別のパラメーター表示があったとしよう．ここで，E は $\mathbf{R}^2$ の領域である．このとき，$\boldsymbol{\varphi}(u,v) = \boldsymbol{\psi}(r,s)$ という関係式から，(u,v) と (r,s) の間に対応がある．それを $(u,v) = \boldsymbol{\Phi}(r,s) = (\Phi_1(r,s), \Phi_2(r,s))$ と書けば，$\boldsymbol{\Phi} : E \to D$ は全単射な写像となる．そこで，上で

定義した面積分において，$(u,v)=(\Phi_1(r,s),\Phi_2(r,s))$ という積分変数の変換を行おう．このとき，変換の Jacobian を計算すると

$$\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\left|\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial r} & \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial s}\\ \dfrac{\partial\Phi_2}{\partial r} & \dfrac{\partial\Phi_2}{\partial s}\end{pmatrix}\right|\mathrm{d}r\mathrm{d}s=\left|\frac{\partial(\Phi_1,\Phi_2)}{\partial(r,s)}\right|\mathrm{d}r\mathrm{d}s \tag{7.3}$$

が成り立つ．また，$\boldsymbol{\psi}(r,s)=\boldsymbol{\varphi}(u,v)=\boldsymbol{\varphi}(\Phi_1(r,s),\Phi_2(r,s))$ の両辺を r および s で微分すると，

$$\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial r}=\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}+\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}\frac{\partial\Phi_2}{\partial r},\qquad \frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial s}=\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}\frac{\partial\Phi_1}{\partial s}+\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}\frac{\partial\Phi_2}{\partial s}$$

が成り立つ．ここで，外積の基本的な性質 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ および $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ を用いると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial r}\times\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial s}&=\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}\right)\times\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial s}\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial s}\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}\right)\\&=\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\frac{\partial\Phi_1}{\partial s}\left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}\right)+\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\frac{\partial\Phi_2}{\partial s}\left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}\right)\\&\quad+\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}\frac{\partial\Phi_1}{\partial s}\left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}\right)+\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}\frac{\partial\Phi_2}{\partial s}\left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}\right)\\&=\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\frac{\partial\Phi_2}{\partial s}-\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}\frac{\partial\Phi_1}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}\right)\\&=\frac{\partial(\Phi_1,\Phi_2)}{\partial(r,s)}\left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}\right)\end{aligned}$$

が成り立つ．これと (7.3) より

$$\left\|\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial r}\times\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial s}\right\|\mathrm{d}r\mathrm{d}s=\left\|\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}\right\|\left|\frac{\partial(\Phi_1,\Phi_2)}{\partial(r,s)}\right|\mathrm{d}r\mathrm{d}s=\left\|\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}\right\|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

が得られる．さらに，$f(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\Phi}(r,s)))=f(\boldsymbol{\psi}(r,s))$ に注意すれば，

$$\iint_D f(\boldsymbol{\varphi}(u,v))\left\|\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(u,v)\right\|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint_E f(\boldsymbol{\psi}(r,s))\left\|\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial r}(r,s)\times\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial s}(r,s)\right\|\mathrm{d}r\mathrm{d}s$$

となり，同じ値になることが確かめられた．

大域的なパラメーター表示をもたないような一般の曲面上の面積分は，その曲面を上記のようにパラメーター表示できるような有限個の曲面に分割し，それら個々の曲面上の面積分の総和として定義される．

$f(\boldsymbol{x})\equiv 1$ のとき，面積分 $\displaystyle\iint_A \mathrm{d}S$ の値を曲面 A の曲面積（表面積）という．

曲面 A がグラフになっている場合の面積分の式を導出しておこう．

$$A:\ x_3=\psi(x_1,x_2)\qquad ((x_1,x_2)\in D)$$

とすると，曲面 A は $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(x_1,x_2)=(x_1,x_2,\psi(x_1,x_2))$ $((x_1,x_2)\in D)$ とパラメーター表示されるので，

$$\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial x_1}=(1,0,\psi_{x_1}),\quad \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial x_2}=(0,1,\psi_{x_2})\qquad\therefore\quad \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial x_1}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial x_2}=(-\psi_{x_1},-\psi_{x_2},1)$$

したがって，

$$\begin{aligned}\mathrm{d}S &= \sqrt{(-\psi_{x_1})^2+(-\psi_{x_2})^2+1}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\\ &= \sqrt{|\nabla\psi(x_1,x_2)|^2+1}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\end{aligned}$$

となり

$$\iint_A f\mathrm{d}S = \iint_D f(x_1,x_2,\psi(x_1,x_2))\sqrt{|\nabla\psi(x_1,x_2)|^2+1}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

が得られる．

以上の準備の下，Stokes の定理と Gauss の定理（発散定理）を紹介しよう．

定理 7.6 (Stokes の定理) Ω を $\mathbf{R}^3$ の領域，$\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)$ を Ω で定義された C^1 級のベクトル場，A を Ω 内の向き付け可能な C^2 級の曲面で，その境界 $C=\partial A$ は C^1 級の閉曲線とする．このとき，

$$\iint_A (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \int_C \boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

が成り立つ．ただし，$\boldsymbol{n}=(n_1,n_2,n_3)$ は曲面 A の裏から表へ向かう A 上の単位法線ベクトルであり，曲線 C は曲面 A の表を左に見てまわるように向き付けられているとする．

証明 曲面 A が次のようにパラメーター表示されている場合を証明しよう．

$$A:\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(u,v)=(\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v),\varphi_3(u,v)) \qquad ((u,v)\in D)$$

より一般の場合は，このようにパラメーター表示される有限個の曲面に分割し，そのおのおのに対して Stokes の定理を適用すればよい．さて，このとき面積要素は次式で与えられる．

$$\mathrm{d}S = \left\|\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(u,v)\right\|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

また，単位法線ベクトルは

$$\boldsymbol{n}=\frac{\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(u,v)}{\left\|\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(u,v)\right\|}$$

である．(向きが逆向きになっている場合は，u と v を予め入れ替えておけばよい．) したがって，

$$\begin{aligned}\iint_A (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S &= \iint_D (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u})(\boldsymbol{\varphi}(u,v))\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(u,v)\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\ &= \iint_D\left\{\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)(\boldsymbol{\varphi}(u,v))\frac{\partial(\varphi_2,\varphi_3)}{\partial(u,v)}\right.\\ &\qquad+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)(\boldsymbol{\varphi}(u,v))\frac{\partial(\varphi_3,\varphi_1)}{\partial(u,v)}\\ &\qquad\left.+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)(\boldsymbol{\varphi}(u,v))\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(u,v)}\right\}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\end{aligned}$$

ここで，領域 D 上の関数 f_1, f_2 を

$$f_1(u,v):=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\varphi}(u,v))\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(u,v), \qquad f_2(u,v):=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\varphi}(u,v))\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(u,v)$$

と定めよう．簡単のために，変数を省略して書くことにすると，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f_2}{\partial u}-\frac{\partial f_1}{\partial v}&=\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}+\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}+\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_3}\frac{\partial \varphi_3}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}\\
&\quad-\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}+\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial v}+\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_3}\frac{\partial \varphi_3}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u}\\
&=\left\{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_2}{\partial v}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_3}{\partial v}\right)\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\right.\\
&\qquad+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial v}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi_3}{\partial v}\right)\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\\
&\qquad\left.+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\frac{\partial \varphi_2}{\partial v}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\frac{\partial \varphi_3}{\partial v}\right)\frac{\partial \varphi_3}{\partial u}\right\}\\
&\quad-\left\{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_3}{\partial u}\right)\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}\right.\\
&\qquad+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi_3}{\partial u}\right)\frac{\partial \varphi_2}{\partial v}\\
&\qquad\left.+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\frac{\partial \varphi_3}{\partial u}\right)\frac{\partial \varphi_3}{\partial v}\right\}\\
&=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial v}\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}-\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}\right)+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial v}\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}-\frac{\partial \varphi_3}{\partial u}\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}\right)\\
&\quad+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}-\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\frac{\partial \varphi_2}{\partial v}\right)+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial v}\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}-\frac{\partial \varphi_3}{\partial u}\frac{\partial \varphi_2}{\partial v}\right)\\
&\quad+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}\frac{\partial \varphi_3}{\partial u}-\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\frac{\partial \varphi_3}{\partial v}\right)+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial v}\frac{\partial \varphi_3}{\partial u}-\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\frac{\partial \varphi_3}{\partial v}\right)\\
&=\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)\frac{\partial(\varphi_2,\varphi_3)}{\partial(u,v)}+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\frac{\partial(\varphi_3,\varphi_1)}{\partial(u,v)}\\
&\qquad+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(u,v)}
\end{aligned}
$$

となるので，

$$\iint_A(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=\iint_D\left(\frac{\partial f_2}{\partial u}-\frac{\partial f_1}{\partial v}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_{\partial D}f_1\mathrm{d}u+f_2\mathrm{d}v$$

が成り立つ．この最後の等式では Green の定理を用いた．この右辺の線積分を計算するために，領域 D の境界 ∂D は

$$\partial D:\ (u,v)=\boldsymbol{\phi}(t)=(\phi_1(t),\phi_2(t))\qquad(a\le t\le b)$$

とパラメーター表示されているとしよう．このとき，曲面 A の境界 C は

$$C:\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\phi}(t))=:\boldsymbol{\psi}(t)$$

とパラメーター表示される．したがって，

$$
\begin{aligned}
\iint_A (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S &= \int_a^b \bigl\{f_1(\boldsymbol{\phi}(t))\phi_1'(t)+f_2(\boldsymbol{\phi}(t))\phi_2'(t)\bigr\}\mathrm{d}t\\
&= \int_a^b \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\phi}(t)))\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(\boldsymbol{\phi}(t))\phi_1'(t)+\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(\boldsymbol{\phi}(t))\phi_2'(t)\right)\mathrm{d}t\\
&= \int_a^b \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\psi}(t))\cdot\boldsymbol{\psi}'(t)\mathrm{d}t = \int_C \boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

となり，望みの式が示された．(証明終)

定理 7.7 (Gauss の定理) Ω を $\mathbf{R}^3$ の領域，$\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)$ を Ω で定義された C^1 級のベクトル場，V をその閉包 $\overline{V}$ が Ω に含まれる有界領域で，その境界 $A=\partial V$ は C^1 級の曲面とする．このとき，

$$\iiint_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \iint_A \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}S$$

が成り立つ．ただし，$\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$，$\boldsymbol{n}=(n_1,n_2,n_3)$ は曲面 A の裏から表へ向かう A 上の単位法線ベクトルである．

Gauss の定理はナブラ記号を用いて

$$\iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \iint_A \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}S$$

と書くことが出来る．ナブラ記号 ∇ を単位外法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ に置き換え，体積積分を面積積分に変えると覚えておくとよい．

証明 Green の定理の証明と同様に，領域 V が

$$V=\{(x_1,x_2,x_3)\,|\,(x_1,x_2)\in D,\varphi(x_1,x_2)<x_3<\psi(x_1,x_2)\}$$

という形をしている場合に証明しよう．ただし，φ,ψ は $\mathbf{R}^2$ の領域 D の閉包 $\overline{D}$ で定義された C^1 級関数であり，$\varphi(x_1,x_2)\le\psi(x_1,x_2)$ $((x_1,x_2)\in D)$ を満たしているとする．さらに，領域 D の境界 $C=\partial D$ は C^1 級の向き付けられた閉曲線で，

$$C:\ (x_1,x_2)=\boldsymbol{\phi}(t)=(\phi_1(t),\phi_2(t)) \qquad (a\le t\le b)$$

とパラメーター表示されているとする．曲面 A_1,A_2,A_3 をそれぞれ

$$
\begin{aligned}
&A_1:\ x_3=\varphi(x_1,x_2) && (x_1,x_2)\in D\\
&A_2:\ x_3=\psi(x_1,x_2) && (x_1,x_2)\in D\\
&A_3:\ \boldsymbol{x}=(\boldsymbol{\phi}(t),x_3) && a\le t\le b,\ \varphi(\boldsymbol{\phi}(t))\le x_3\le\psi(\boldsymbol{\phi}(t))
\end{aligned}
$$

で定めれば，領域 V の境界 A は $A=A_1+A_2+A_3$ で与えられる．実際，A_1 は V の下側の曲面，A_2 は V の上側の曲面，A_3 は V の側面になっている．それぞれの曲面上での面積積分を先に計算しよう．曲面 A_1 上では，

$$\boldsymbol{n}=\frac{(\varphi_{x_1}(x_1,x_2),\varphi_{x_2}(x_1,x_2),-1)}{\sqrt{|\nabla\varphi(x_1,x_2)|^2+1}}, \qquad \mathrm{d}S=\sqrt{|\nabla\varphi(x_1,x_2)|^2+1}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

であるから

$$\iint_{A_1} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}S = \iint_D \biggl\{ u_1(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2))\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x_1,x_2) \\ + u_2(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2))\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_1,x_2) - u_3(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2)) \biggr\} \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

曲面 A_2 上では，

$$\boldsymbol{n} = \frac{(-\psi_{x_1}(x_1,x_2), -\psi_{x_2}(x_1,x_2), 1)}{\sqrt{|\nabla\psi(x_1,x_2)|^2+1}}, \qquad \mathrm{d}S = \sqrt{|\nabla\psi(x_1,x_2)|^2+1}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

であるから

$$\iint_{A_2} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}S = \iint_D \biggl\{ -u_1(x_1,x_2,\psi(x_1,x_2))\frac{\partial\psi}{\partial x_1}(x_1,x_2) \\ - u_2(x_1,x_2,\psi(x_1,x_2))\frac{\partial\psi}{\partial x_2}(x_1,x_2) + u_3(x_1,x_2,\psi(x_1,x_2)) \biggr\} \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

曲面 A_3 上では，

$$\boldsymbol{n} = \frac{(\phi_2'(t), -\phi_1'(t), 0)}{|\boldsymbol{\phi}'(t)|}, \qquad \mathrm{d}S = |\boldsymbol{\phi}'(t)|\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x_3$$

であるから

$$\iint_{A_3} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}S = \int_a^b \biggl(\int_{\varphi(\boldsymbol{\phi}(t))}^{\psi(\boldsymbol{\phi}(t))} \bigl\{ u_1(\boldsymbol{\phi}(t),x_3)\phi_2'(t) - u_2(\boldsymbol{\phi}(t),x_3)\phi_1'(t) \bigr\} \mathrm{d}x_3 \biggr) \mathrm{d}t$$

次に，体積積分を計算しよう．

$$\iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \iiint_V \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \iiint_V \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \iiint_V \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

以下では，個々の体積積分を計算していく．

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \iint_D \biggl(\int_{\varphi(x_1,x_2)}^{\psi(x_1,x_2)} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3)\mathrm{d}x_3 \biggr) \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\ &= \iint_D \bigl(u_3(x_1,x_2,\psi(x_1,x_2)) - u_3(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2)) \bigr) \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \end{aligned}$$

次に，領域 D 上の関数 f_1, f_2 を

$$f_j(x_1,x_2) := \int_{\varphi(x_1,x_2)}^{\psi(x_1,x_2)} u_j(x_1,x_2,x_3)\mathrm{d}x_3 \qquad (j=1,2)$$

と定めよう．このとき，補題 7.1 より

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x_1,x_2) = \int_{\varphi(x_1,x_2)}^{\psi(x_1,x_2)} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}(x_1,x_2,x_3)\mathrm{d}x_3 \\ + u_j(x_1,x_2,\psi(x_1,x_2))\frac{\partial\psi}{\partial x_j}(x_1,x_2) - u_j(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2))\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x_1,x_2)$$

であるから，$j=1,2$ に対して

$$\begin{aligned}
&\iiint_V \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \iint_D \left(\int_{\varphi(x_1,x_2)}^{\psi(x_1,x_2)} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}(x_1,x_2,x_3)\mathrm{d}x_3\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\
&\quad = \iint_D \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\
&\qquad + \iint_D \left(u_j(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2))\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x_1,x_2) - u_j(x_1,x_2,\psi(x_1,x_2))\frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x_1,x_2)\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2
\end{aligned}$$

が成り立つ．さらに，Green の定理より

$$\begin{aligned}
\iint_D \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 &= \int_C (-f_2)\mathrm{d}x_1 + f_1\mathrm{d}x_2 \\
&= \int_a^b \big(-f_2(\boldsymbol{\phi}(t))\phi_1'(t) + f_1(\boldsymbol{\phi}(t))\phi_2'(t)\big)\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \left(\int_{\varphi(\boldsymbol{\phi}(t))}^{\psi(\boldsymbol{\phi}(t))} \big\{u_1(\boldsymbol{\phi}(t),x_3)\phi_2'(t) - u_2(\boldsymbol{\phi}(t),x_3)\phi_1'(t)\big\}\mathrm{d}x_3\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

以上の計算をまとめると，

$$\begin{aligned}
\iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \iint_{A_1} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}S + \iint_{A_2} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}S + \iint_{A_3} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}S \\
&= \iint_A \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}S
\end{aligned}$$

となり，望みの等式が示された．（証明終）