数学解析第１　第１０回講義ノート

　次に，スカラー場の勾配の意味をもう少し説明しよう．そのために，まず方向微分を定義する．

定義 6.3 Ω を $\mathbf{R}^n$ における領域，$\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$，$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ を単位ベクトルとし，$f = f(\boldsymbol{x})$ を Ω で定義された関数とする．このとき，f の $\boldsymbol{x}_0$ における $\boldsymbol{a}$ 方向の**方向微分**を次式で定義する．

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + h\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{h}$$

　すなわち，方向微分とは関数 f を $\boldsymbol{x}_0$ を通り $\boldsymbol{a}$ に平行な直線上での１変数関数と見なした時の $\boldsymbol{x}_0$ における微分係数（変化率）を表わしている．f が C^1 級の関数であれば方向微分は常に存在し，合成関数の微分法より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}_0) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a}) \bigg|_{t=0} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a}) a_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a}) a_n \bigg|_{t=0} \\
&= \boldsymbol{a} \cdot \nabla f(\boldsymbol{x}_0)
\end{aligned}$$

となる．この式と Cauchy–Schwarz の不等式より

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}_0) \right| \leq \|\boldsymbol{a}\| \|\nabla f(\boldsymbol{x}_0)\| = \|\nabla f(\boldsymbol{x}_0)\|$$

が成り立つ．また，この不等式で等号が成り立つのは $\|\nabla f(\boldsymbol{x}_0)\|$ が $\boldsymbol{a}$ に平行な時に限られる．このことから，f の勾配 ∇f に対する次の性質が分かる．

- $\nabla f(\boldsymbol{x})$ の向きは，$f(\boldsymbol{x})$ の変化が最大になる向きであり，$\|\nabla f(\boldsymbol{x})\|$ はその変化の大きさを表わす．

　次に，方程式 $f(\boldsymbol{x}) = c$ (c は定数) で表わされる n 次元 Euclid 空間内の超曲面を考えよう．例えば，$f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ の場合，その超曲面は原点を中心とする半径 $\sqrt{c}$ ($c > 0$) の球面の族を表わす．このとき，f の勾配 ∇f に対する次の性質も分かる．

- $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$ は，$f(\boldsymbol{x}) = c$ で表わされる曲面の $\boldsymbol{x}_0$ における法線ベクトルである．

　これを示すために，曲面 $f(\boldsymbol{x}) = c$ 上の曲線 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ $(-1 < t < 1)$ で $\boldsymbol{x}_0$ を通るものを考える．$\boldsymbol{\varphi}(0) = \boldsymbol{x}_0$ とすれば，$\boldsymbol{\varphi}'(0) = (\varphi_1'(0), \ldots, \varphi_n'(0))$ は $\boldsymbol{x}_0$ における曲面の接ベクトルになる．曲線 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ の取り方を変えることにより，$\boldsymbol{\varphi}'(0)$ は $\boldsymbol{x}_0$ における任意の接ベクトルを取りうる．さて，曲線 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ が曲面 $f(\boldsymbol{x}) = c$ 上にあることから，

$$f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) = c \quad (-1 < t < 1)$$

が成り立つ．この両辺を t で微分すると，合成関数の微分法より

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{\varphi}(t))\varphi_1'(t) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{\varphi}(t))\varphi_n'(t) = 0 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{\varphi}'(t) \cdot \nabla f(\boldsymbol{\varphi}(t)) = 0$$

ここで $t=0$ とすると，$\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{x}_0$ より

$$\boldsymbol{\varphi}'(0)\cdot\nabla f(\boldsymbol{x}_0)=0$$

これは $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$ が $\boldsymbol{x}_0$ における任意の接ベクトルと直交することを意味している．したがって，$\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$ は法線ベクトルであることが分かる．

例　3 次元 Euclid 空間内におけるグラフ状の曲面 $z=h(x,y)$ を考えよう．$f(x,y,z):=z-h(x,y)$ とおくと，この曲面は $f(x,y,z)=0$ と表わされる．したがって，曲面上の点 $(x,y,h(x,y))$ における法線ベクトルは

$$(\nabla f)(x,y,h(x,y))=\bigl(-h_x(x,y),-h_y(x,y),1\bigr)$$

の定数倍で与えられる．特に，単位法線ベクトルは

$$\pm\frac{\bigl(-h_x(x,y),-h_y(x,y),1\bigr)}{\sqrt{\bigl(h_x(x,y)\bigr)^2+\bigl(h_y(x,y)\bigr)^2+1}}$$

となる．

7　線積分，面積分とその応用

1 変数関数に対する微分積分の基本定理

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x=f(b)-f(a)$$

の重要性を今さら説明するまでもないであろう．この定理は微分積分学の基礎となる定理であり，この定理のお陰で，区分求積法を用いなくても様々な関数に対する積分の値を計算することが可能になった．それゆえ，この定理を多変数関数に拡張することの意義を容易に予想できるであろう．そのような拡張として，Green の定理，Stokes の定理，Gauss の定理（発散定理）がある．以下で，それらの定理と簡単な応用例を紹介する．まず，Green の定理から始める．本来であれば，先にベクトル場の線積分を定義しておかなければならないのであるが，それは後回しにしよう．

定理 7.1 (Green の定理)　Ω を $\mathbf{R}^2$ の領域，f,g を Ω で定義された C^1 級の実数値関数とする．D をその閉包 $\overline{D}$ が Ω に含まれる有界領域で，その境界 $C=\partial D$ は C^1 級の閉曲線とする．このとき，

$$\iint_D\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_C f\mathrm{d}y+g\mathrm{d}x$$

が成り立つ．ただし，曲線 C は領域 D の内部を左に見てまわるように向き付けられているとする．

この定理では，C^1 級の閉曲線という用語を用いている．平面あるいは空間内の曲線という概念は皆よく知っていると思うが，これを数学的に厳密に定義しようとすると意外とやっかいである．ここでは深入りせず，素朴に，C^1 級関数を用いてパラメーター表示される集合

としよう．さて，境界が C^1 級であるという仮定は，実はもっと弱めることができる．実際，正方形のように角がある領域の境界は C^1 級ではないが，そのような領域に対しても Green の定理は成立する．領域 D に対する条件や関数 f, g に対する条件をどこまで弱めることができるか？という問題も結構やっかいである．以下では，領域 D に対して上記の仮定の下ではなく，別の仮定の下で証明を与えるが，それを見れば，大抵の応用例は網羅されていることが分かるであろう．

さて，まず初めに関数に対する線積分を定義しよう．

定義 7.1 (関数の線積分) Ω を $\mathbf{R}^n$ の領域，f を Ω で定義された連続関数，C を Ω 内の C^1 級曲線で

$$C:\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \qquad (a \le t \le b)$$

とパラメーター表示されているとする.（C が C^1 級であるとは，このパラメーター表示にあらわれる関数 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ が C^1 級であることを意味する.）このとき，f の C 上の線積分を次式で定める．

$$\int_C f \mathrm{d}s := \int_a^b f(\boldsymbol{\varphi}(t)) \|\boldsymbol{\varphi}'(t)\| \mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \sqrt{\sum_{j=1}^n (\varphi'(t))^2}\, \mathrm{d}t$$

特に，C が閉曲線のとき（すなわち，$\boldsymbol{\varphi}(a) = \boldsymbol{\varphi}(b)$ のとき）この線積分を $\displaystyle\oint_C f \mathrm{d}s$ と書く．

線積分にあらわれる $\mathrm{d}s$ は線素と呼ばれており，形式的には

$$\mathrm{d}s = \|\boldsymbol{\varphi}'(t)\| \mathrm{d}t = \sqrt{\sum_{j=1}^n (\varphi'(t))^2}\, \mathrm{d}t$$

と書かれる．さて，曲線のパラメーター表示は一通りではなく，一般に何通りもある．また，人によって異なるパラメーター表示を使ったりする．上で定義した線積分は，実はどんなパラメーター表示を使っても同じ値になり，関数 f と曲線 C からだけで決まることが確かめられる．実際，

$$C:\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\psi}(\tau) = (\psi_1(\tau), \ldots, \psi_n(\tau)) \qquad (\alpha \le \tau \le \beta)$$

という別のパラメーター表示があったとしよう．$\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\psi}(\tau)$ という関係式から，t と τ の間に対応がある．それを $t = \zeta(\tau)$ と書けば，

$$\zeta(\alpha) = a, \quad \zeta(\beta) = b, \qquad \boldsymbol{\varphi}(\zeta(\tau)) = \boldsymbol{\psi}(\tau), \quad \zeta'(\tau) \ge 0 \quad (\alpha \le \tau \le \beta)$$

という関係が成り立つはずである.（この辺り厳密な証明を与えようとすれば，必然的に曲線の定義を厳密に与えないといけなくなる.）さて，先程定義した線積分において $t = \zeta(\tau)$ という変数変換を行えば，

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(\boldsymbol{\varphi}(t)) \|\boldsymbol{\varphi}'(t)\| \mathrm{d}t &= \int_\alpha^\beta f(\boldsymbol{\varphi}(\zeta(\tau))) \|\boldsymbol{\varphi}'(\zeta(\tau))\| \zeta'(\tau) \mathrm{d}\tau \\
&= \int_\alpha^\beta f(\boldsymbol{\psi}(\tau)) \|\boldsymbol{\varphi}'(\zeta(\tau))\zeta'(\tau)\| \mathrm{d}\tau \\
&= \int_\alpha^\beta f(\boldsymbol{\psi}(\tau)) \|\boldsymbol{\psi}'(\tau)\| \mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

となり，同じ値になることが確かめられた．上の最後の等式では，$\boldsymbol{\varphi}(\zeta(\tau)) = \boldsymbol{\psi}(\tau)$ の両辺を微分することによって得られる式 $\boldsymbol{\varphi}'(\zeta(\tau))\zeta'(\tau) = \boldsymbol{\psi}'(\tau)$ を用いた．

$f(\boldsymbol{x}) \equiv 1$ のとき，線積分 $\displaystyle\int_C \mathrm{d}s$ の値は曲線 C の長さに他ならないことを注意しておく．

次に，ベクトル場に対する線積分を定義しよう．

定義 7.2 (ベクトル場の線積分) Ω を $\mathbf{R}^n$ の領域，$\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ を Ω で定義された連続なベクトル場，C を Ω 内の向き付けられた C^1 級曲線で

$$C:\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \qquad (a \leq t \leq b)$$

とパラメーター表示されているとする.（曲線の向きはパラメーター t が増加する方向であり，今の場合 $\boldsymbol{\varphi}(a)$ から $\boldsymbol{\varphi}(b)$ に向かう向きが付いている.）このとき，ベクトル場 $\boldsymbol{u}$ の C 上の線積分を次式で定める．

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{u}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_C u_1 \mathrm{d}x_1 + \cdots + u_n \mathrm{d}x_n \\ &:= \int_a^b \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\varphi}(t))\cdot \boldsymbol{\varphi}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{j=1}^n u_j(\boldsymbol{\varphi}(t))\varphi_j'(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

この積分もまた曲線 C の向きを変えないパラメーターと取り方に依らずに決まることが確かめられる.（各自確かめよ.）しかし，曲線の向きを変えるとその積分の値の符号が変わる．一般に，向き付けられた曲線 C の向きを変えた曲線を $-C$ で表わす．このとき，

$$\int_{-C} \boldsymbol{u}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_C \boldsymbol{u}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

が成り立つ．実際，向き付けられた曲線 C が

$$C:\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \qquad (a \leq t \leq b)$$

とパラメーター表示されているとしよう．このとき，$\boldsymbol{\psi}(\tau) := \boldsymbol{\varphi}(a\tau + b(1-\tau))$ と定めると，曲線 $-C$ は

$$-C:\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\psi}(\tau) \qquad (0 \leq \tau \leq 1)$$

とパラメーター表示される．したがって，

$$\begin{aligned}\int_{-C} \boldsymbol{u}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_0^1 \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\psi}(\tau))\cdot \boldsymbol{\psi}'(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^1 \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\varphi}(a\tau + b(1-\tau)))\cdot \boldsymbol{\varphi}'(a\tau + b(1-\tau))(a-b)\,\mathrm{d}\tau \\ &\qquad \text{（ここで } t = a\tau + b(1-\tau) \text{ と置換すると，} \mathrm{d}t = (a-b)\mathrm{d}\tau \text{ より）} \\ &= \int_b^a \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\varphi}(t))\cdot \boldsymbol{\varphi}'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\varphi}(t))\cdot \boldsymbol{\varphi}'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_C \boldsymbol{u}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

が得られる．このように，ベクトル場の線積分は向きがある積分であるのに対し，関数の線積分（線素 $\mathrm{d}s$ による線積分とも言う）は向きがなく，曲線の向きを変えても値は変わらないことに注意しよう．

ベクトル場の線積分と線素 $\mathrm{d}s$ による線積分には次のような関係がある．向き付けられた曲線 $C : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)\ (a \le t \le b)$ の接ベクトルは $\boldsymbol{\varphi}'(t)$ であるから，単位接ベクトルを $\boldsymbol{T}$ とおくと，

$$\boldsymbol{T} = \frac{\boldsymbol{\varphi}'(t)}{\|\boldsymbol{\varphi}'(t)\|}$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_a^b \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \boldsymbol{\varphi}'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \left(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \frac{\boldsymbol{\varphi}'(t)}{\|\boldsymbol{\varphi}'(t)\|} \right) \|\boldsymbol{\varphi}'(t)\|\,\mathrm{d}t \\ &= \int_C (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{T})\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

が成り立つ．すなわち，ベクトル場 $\boldsymbol{u}$ の曲線 C 上の線積分は，そのベクトル場と曲線 C の単位接ベクトルとの内積で定まる関数の線素 $\mathrm{d}s$ による積分である．線素による積分は向きを持たないが，曲線の向きを変えると接ベクトルの向きは反対向きになる．そのことから，ベクトル場の線積分には向きが付いているのである．

二つの曲線 C_1 と C_2 を繋げた曲線を $C_1 + C_2$ と表わす．このとき，次式が成り立つのは明らかであろう．

$$\int_{C_1+C_2} \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{C_1} \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{C_2} \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

C_1 と C_2 が繋がっていない（離れている）曲線の場合には，上式がその線積分の定義を与えていると思えば良い．