練習問題 9 (応用解析第 1)　　　　Jul. 10, 2018 (Tue.)

$\boxed{1}$ 次の熱方程式に対する Neumann 境界値問題を考える．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < l \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0, & t > 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

ただし，$f(x)$ は閉区間 $[0,l]$ 上で定義された連続関数とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) Fourier の方法を用いて (1.1) の Fourier 級数解を，$f(x)$ の Fourier 係数 a_n, b_n を用いて書き下せ．ただし，今の場合 $f(x)$ の Fourier 係数 a_n, b_n は次式で定められているとする．

$$a_n := \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx, \qquad b_n := \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

(2) 初期値 $f(x)$ は $[0,l]$ 上の C^1 級関数とする．このとき，(1.1) は $[0,l]\times[0,\infty)$ 上連続，$[0,l]\times(0,\infty)$ 上 C^∞ 級となる解 $u(x,t)$ を持つことを示せ．ただし，周期境界条件の下での熱方程式の初期値問題の解の存在定理は用いてもよい.（ヒント：初期値を偶関数かつ $2l$ 周期関数となるように拡張せよ.）