

1 \mathbf{R}^2 上の関数 $f = f(x, y)$ を

$$f(x, y) := x^3 + y^3 - x^2 - xy - y^2 + x + y - 1$$

により定める. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) $(x, y) = (1, 1)$ の近傍で, 方程式 $f(x, y) = 0$ により陰関数 $y = \varphi(x)$ が定められること (つまり, 陰関数定理の仮定が満たされていること) を示し, $\varphi'(1)$ を求めよ.
- (2) (1) の陰関数 $\varphi(x)$ を Taylor 展開して

$$\varphi(x) = a_0 + a_1(x - 1) + a_2(x - 1)^2 + O((x - 1)^3) \quad (x \rightarrow 1)$$

とするとき, 係数 a_0, a_1, a_2 の値を求めよ.

2 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ ($f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$) および $g: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^l$ ($g(\mathbf{y}) = (g_1(\mathbf{y}), \dots, g_l(\mathbf{y}))$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbf{R}^m$) は C^1 級であるとする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 合成関数 $(g \circ f)(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x}))$ の Jacobi 行列 $D(g \circ f)$ に対して

$$D(g \circ f)(\mathbf{x}) = Dg(f(\mathbf{x}))Df(\mathbf{x})$$

が成り立つことを示せ.

- (2) $n = m = l$ のとき, 合成関数 $g \circ f$ の Jacobian $J_{g \circ f}$ に対して

$$J_{g \circ f}(\mathbf{x}) = J_g(f(\mathbf{x}))J_f(\mathbf{x})$$

が成り立つことを示せ.

レポート作成上の注意

- A4版のレポート用紙を使用し, 表紙を付けること. 表紙には科目名, レポート番号, 学籍番号, 氏名, 所属学科を記入すること (学事センターにある所定の表紙を使う必要はない.) レポートの左上をホチキス留めすること.
- 最終的な答えだけでなく, 途中計算を分かりやすく説明すること.
- ワードプロ, $\text{T}_\text{E}_\text{X}$ 等は使用せず, 手書きで (丁寧な字で) 作成すること.
- レポートは次回の講義終了後に回収する.

数学解析第1のHPのURL

http://www.math.keio.ac.jp/~iguchi/Lectures/MA_2015.html