

- 1] $f \in C([a, b])$, $K \in C([a, b] \times [a, b])$, $\lambda \in \mathbf{R}$ とし, 次の $u = u(x)$ を未知関数とする Fredholm の積分方程式

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)u(y) dy + f(x), \quad x \in [a, b] \quad (*)$$

を考える. $u, v \in C([a, b])$ に対して, 距離 $d(u, v)$ を

$$d(u, v) := \max_{a \leq x \leq b} |u(x) - v(x)|$$

により定めると, $(C([a, b]), d)$ は完備距離空間となる. $u \in C([a, b])$ に対して, $[a, b]$ 上の関数 Tu を

$$(Tu)(x) := \lambda \int_a^b K(x, y)u(y) dy + f(x), \quad x \in [a, b]$$

により定める. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) T は $C([a, b])$ からそれ自身への写像になること (すなわち, $u \in C([a, b])$ ならば $Tu \in C([a, b])$ となること) を示せ. ただし, 有界閉集合 $[a, b] \times [a, b]$ 上の連続関数は一様連続になることを証明抜きで用いてもよい.
- (2) $M := \max\{|K(x, y)| \mid x, y \in [a, b]\}$ とおく. もし $M(b-a)|\lambda| < 1$ ならば, T は $(C([a, b]), d)$ からそれ自身への縮小写像になることを示せ (したがって縮小写像の原理により, Fredholm の積分方程式 (*) はただ 1 つの解 $u \in C([a, b])$ を持つ.)

レポート作成上の注意

- A 4 版のレポート用紙を使用し, 表紙を付けること. 表紙には科目名, レポート番号, 学籍番号, 氏名, 所属学科を記入すること (学事センターにある所定の表紙を使う必要はない.) レポートの左上をホチキス留めすること.
- 最終的な答えだけでなく, 途中計算を分かりやすく説明すること.
- ワードプロ, $\text{T}_\text{E}_\text{X}$ 等は使用せず, 手書きで (丁寧な字で) 作成すること.
- レポートは次回の講義終了後に回収する.

中間試験のお知らせ

- 試験日・時間: 6月12日(水) 10時45分 ~ 12時15分
- 試験場所: 第4校舎33教室 (講義と同じ部屋)