

1 正の実数 x, y, z に対して, 関数 f および g を

$$f(x, y, z) = x^x y^y z^z - 1, \quad g(x, y, z) = z \sin(\pi x \cos(\pi y))$$

で定義する. このとき, 陰関数定理より $z = 1$ の近傍で定義された滑らかな関数 φ および ψ が存在して

$$\begin{cases} f(\varphi(z), \psi(z), z) \equiv g(\varphi(z), \psi(z), z) \equiv 0, \\ \varphi(1) = \psi(1) = 1 \end{cases}$$

が成り立つ.

- (1) 上の記述において陰関数定理が用いられているが, その定理を適用するための仮定が満たされていることを説明せよ.
- (2) $\varphi'(1)$ および $\psi'(1)$ を求めよ.
- (3) φ および ψ を $z = 1$ のまわりで Taylor 展開して

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= a_0 + a_1(z-1) + a_2(z-1)^2 + O((z-1)^3) \\ \psi(z) &= b_0 + b_1(z-1) + b_2(z-1)^2 + O((z-1)^3) \quad (z \rightarrow 1) \end{aligned}$$

とするとき, 係数 $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ の値を求めよ.

2 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n$ (縦ベクトル), $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ を multi-index, $f = f(\mathbf{x}) \in C^2(\mathbf{R}^n)$, $H_f(\mathbf{x})$ を f の Hesse 行列とする. このとき, 任意の $\mathbf{a}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ (縦ベクトル) に対して,

$$\sum_{|\alpha|=2} \frac{f^{(\alpha)}(\mathbf{a})}{\alpha!} (\mathbf{x} - \mathbf{a})^\alpha = \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (H_f(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}))$$

が成り立つことを確かめよ.

レポート作成上の注意

- A 4 版のレポート用紙を使用し, 表紙を付けること (学事センターにある所定の表紙を使う必要はない.) 表紙には科目名, レポート番号, 学籍番号, 氏名, 所属学科を記入すること. レポートの左上をホチキス留めすること.
- 最終的な答えだけでなく, 途中計算を分かりやすく説明すること.
- ワープロ, TeX 等は使用せず, 手書きで (丁寧な字で) 作成すること.
- レポートは次回の講義終了後に回収する.