レポート問題３ (関数方程式第１)　　　　Oct. 7, 2013 (Mon.)

$\boxed{1}$ 次の $u = u(x,t)$ $(x \in \mathbf{R}, t > 0)$ に対する非粘性 Burgers 方程式を考える．

$$u_t + uu_x = 0$$

(1) $\mathbf{R} \times (0,\infty)$ 上のテスト関数の空間を C_0^∞ とおく，すなわち，$\phi = \phi(x,t) \in C_0^\infty$ は $\mathbf{R} \times (0,\infty)$ 上の無限回微分可能な関数で，$\mathbf{R} \times (0,\infty)$ のあるコンパクト集合の外では恒等的に零である．

$u = u(x,t) \in C^1(\mathbf{R} \times (0,\infty))$ を非粘性 Burgers 方程式の解とすると，任意の $\phi \in C_0^\infty$ に対して次式が成り立つことを示せ．

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u\phi_t + \frac{1}{2}u^2\phi_x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0$$

ヒント：$uu_x = \frac{1}{2}(u^2)_x$ に注意して部分積分を用いよ．

注意：逆に，任意の $\phi \in C_0^\infty$ に対して上式が成り立つとき，関数 $u = u(x,t)$ を非粘性 Burgers 方程式の弱解 (weak solution) という．上式には u の導関数が現れていないことに注目せよ．

(2) u_l, u_r, s を実定数とし，$\mathbf{R} \times (0,\infty)$ 上の関数 $u = u(x,t)$ を

$$u(x,t) := \begin{cases} u_l & x < st \\ u_r & x > st \end{cases}$$

により定める．この関数が非粘性 Burgers 方程式の弱解になるための必要かつ十分な条件は

$$(u_l - u_r)s = \frac{1}{2}(u_l^2 - u_r^2)$$

であることを示せ．

ヒント：弱解の定義式の積分を $\{(x,t)\,|\,x > st\}$ および $\{(x,t)\,|\,x < st\}$ 上の積分に分割し（これらの領域上では u は定数である）そのおのおのにおいて Green の定理を用いよ．

注意：この条件を Rankine-Hugoniot 条件という．

レポート作成上の注意

- Ａ４版のレポート用紙を使用し，表紙を付けること．表紙には科目名，レポート番号，学籍番号，氏名を記入すること．レポートの左上をホチキス留めすること．
- 最終的な答えだけでなく，途中計算を分かりやすく説明すること．
- ワープロ，TeX 等は使用せず，手書きで（丁寧な字で）作成すること．
- レポートは次回の講義終了後に回収する．