

## 数学解析第 1 第 8 回講義ノート

以上の準備の下，2 変数関数に対する陰関数定理を証明しよう．念のため，ここで陰関数定理を再掲載しておく．

**定理 2.1 (陰関数定理)**  $\Omega$  を  $\mathbb{R}^2$  の領域， $(a, b) \in \Omega$ ， $f(x, y)$  を  $\Omega$  で定義された  $C^1$  級の実数値関数とする．このとき，

$$f(a, b) = 0 \quad \text{および} \quad f_y(a, b) \neq 0$$

ならば，方程式

$$f(x, y) = 0$$

は  $(a, b)$  のある近傍で  $y$  について一意に解ける．すなわち (十分小さな) 正数  $r, \delta$  および開区間  $(a - r, a + r)$  で定義された  $C^1$  級関数  $\varphi$  が存在し，以下の性質を満たす．

- (1)  $f(x, \varphi(x)) = 0$ ,  $|\varphi(x) - b| < \delta$  ( $|x - a| < r$ ),  $\varphi(a) = b$
- (2)  $f(x, y) = 0$ ,  $|x - a| < r$ ,  $|y - b| < \delta \Rightarrow y = \varphi(x)$
- (3)  $\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}$
- (4)  $f$  が  $C^k$  級 ( $k \geq 2$ ) ならば，陰関数  $\varphi$  もまた  $C^k$  級

**証明**  $f(x, y)$  の代わりに  $\tilde{f}(x, y) := f(x + a, y + b)$  を考察することにより，一般性を失うことなく， $(a, b) = (0, 0)$  の場合を証明すれば十分である．したがって，以下では  $(a, b) = (0, 0)$  と仮定する (勿論，このような簡略化を行わなくても証明することができるが，式の記述が長くなってしまう．) このとき，定理の仮定より

$$f(0, 0) = 0 \quad \text{および} \quad f_y(0, 0) \neq 0$$

が成り立っている．実定数  $A$  および  $\Omega$  上の実数値関数  $G(x, y)$  を

$$A := \frac{1}{f_y(0, 0)} \quad \text{および} \quad G(x, y) := y - Af(x, y)$$

により定義する．仮定より， $G$  は  $\Omega$  上の  $C^1$  級関数になり，

$$\begin{aligned} f(x, y) = 0 &\Leftrightarrow y = G(x, y) \\ &\Leftrightarrow y \text{ は } G(x, \cdot) \text{ の不動点} \end{aligned}$$

となる．

**注意** このようにして，方程式の根を求める問題は関数  $G(x, \cdot)$  の不動点を求める問題に帰着されたのであるが，何故このような関数  $G(x, y)$  を導入したのか不思議に思う人もいるであろう．縮小写像の原理での証明を真似て反復法により不動点  $y$  を求めるとすれば，

$$y_{n+1} = G(x, y_n) = y_n - \frac{f(x, y_n)}{f_y(0, 0)}$$

により近似根  $\{y_n\}$  を求め，その極限として不動点を求めることになる．この近似アルゴリズムは，分母の値が  $f_y(x, y_n)$  ではなく  $f_y(0, 0)$  という値が使われているが， $x$  をパラメーターとした Newton 法に他ならないことが分かる．

定理 2.1 の証明に戻ろう . 3つのステップに分けて証明する .

Step 1 十分小さな正数  $r$  および  $\delta$  が存在し ,

$$(1) \quad |x| \leq r, |y| \leq \delta \Rightarrow |G(x, y)| \leq \delta$$

$$(2) \quad |x| \leq r, |y_1|, |y_2| \leq \delta \Rightarrow |G(x, y_1) - G(x, y_2)| \leq \frac{1}{2}|y_1 - y_2|$$

が成り立つことを示そう .

$$\begin{aligned} G(x, y_1) - G(x, y_2) &= y_1 - y_2 - A(f(x, y_1) - f(x, y_2)) \\ &= A\{f_y(0, 0)(y_1 - y_2) - (f(x, y_1) - f(x, y_2))\} \end{aligned}$$

ここで , 微分積分学の基本定理および合成関数の微分法より

$$\begin{aligned} f(x, y_1) - f(x, y_2) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x, ty_1 + (1-t)y_2) dt \\ &= \int_0^1 f_y(x, ty_1 + (1-t)y_2) dt (y_1 - y_2) \end{aligned}$$

であるから ,

$$G(x, y_1) - G(x, y_2) = A \int_0^1 \{f_y(0, 0) - f_y(x, ty_1 + (1-t)y_2)\} dt (y_1 - y_2)$$

が成り立つ . 一方 ,  $f_y$  は  $(0, 0)$  で連続であるから , 十分小さな正数  $\delta$  が存在し

$$|x| \leq \delta, |y| \leq \delta \Rightarrow |f_y(0, 0) - f_y(x, y)| \leq \frac{1}{2|A|}$$

が成り立つ . したがって ,  $|x| \leq \delta, |y_1|, |y_2| \leq \delta$  ならば ,  $0 \leq t \leq 1$  を満たす任意の  $t$  に対して

$$|ty_1 + (1-t)y_2| \leq t|y_1| + (1-t)|y_2| \leq t\delta + (1-t)\delta = \delta$$

が成り立つので ,

$$|f_y(0, 0) - f_y(x, ty_1 + (1-t)y_2)| \leq \frac{1}{2|A|} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

となり ,

$$\begin{aligned} |G(x, y_1) - G(x, y_2)| &\leq |A| \int_0^1 |f_y(0, 0) - f_y(x, ty_1 + (1-t)y_2)| dt |y_1 - y_2| \\ &\leq |A| \int_0^1 \frac{1}{2|A|} dt |y_1 - y_2| = \frac{1}{2}|y_1 - y_2| \end{aligned}$$

が成り立つ . さらに , 仮定より  $G(0, 0) = 0$  であるから ,  $G$  の  $(0, 0)$  における連続性より , 十分小さな正数  $r \in (0, \delta]$  が存在して

$$|x| \leq r \Rightarrow |G(x, 0)| = |G(x, 0) - G(0, 0)| \leq \frac{\delta}{2}$$

が成り立つ . したがって ,  $|x| \leq r, |y| \leq \delta$  ならば

$$\begin{aligned} |G(x, y)| &\leq |G(x, y) - G(x, 0)| + |G(x, 0)| \\ &\leq \frac{1}{2}|y| + \frac{\delta}{2} \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \end{aligned}$$

となり , 望みの主張が示された .

Step 2 次に, 集合  $X$  および集合  $X$  上の距離  $d$  を次式で定義しよう.

$$X := \{\varphi \in C([-r, r]) \mid \max_{|x| \leq r} |\varphi(x)| \leq \delta, \varphi(0) = 0\}$$

$$d(\varphi, \psi) := \max_{|x| \leq r} |\varphi(x) - \psi(x)| \quad (\varphi, \psi \in X)$$

このとき,  $(X, d)$  は完備距離空間になる. 実際, 距離空間になることは明らかであろう. 完備性を証明するために,  $\{\varphi_n\}$  を  $(X, d)$  における Cauchy 列とする.  $X$  は  $C([-r, r])$  の部分集合であることから,  $\{\varphi_n\}$  は距離空間  $(C([-r, r]), d)$  における Cauchy 列になっていることが分かる. ところが, 定理 5.1 より  $(C([-r, r]), d)$  は完備であるから, ある連続関数  $\varphi \in C([-r, r])$  が存在し,

$$d(\varphi_n, \varphi) = \max_{|x| \leq r} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つ. すなわち,  $\{\varphi_n\}$  は  $\varphi$  に一様収束している. 一方,  $\varphi_n \in X$  より

$$|\varphi_n(x)| \leq \delta \quad (|x| \leq r) \quad \text{および} \quad \varphi_n(0) = 0$$

が成り立っているので, ここで  $n \rightarrow \infty$  とすれば

$$|\varphi(x)| \leq \delta \quad (|x| \leq r) \quad \text{および} \quad \varphi(0) = 0$$

となり,  $\varphi \in X$  となる. これは, 距離空間  $(X, d)$  が完備であることを示している.

さて,  $\varphi \in X$  に対して区間  $[-r, r]$  上の関数  $T\varphi$  を

$$(T\varphi)(x) := G(x, \varphi(x)) \quad (|x| \leq r)$$

により定めよう. このとき, 写像  $T$  は  $X$  から  $X$  への縮小写像になる. 実際,  $\varphi \in X$  とすると,  $\varphi \in C([-r, r])$  より  $T\varphi \in C([-r, r])$  となることは明らかであろう. また,  $\varphi(0) = 0$  より

$$(T\varphi)(0) = G(0, \varphi(0)) = G(0, 0) = 0$$

が成り立つ. さらに,  $|x| \leq r$  のとき  $|\varphi(x)| \leq \delta$  であるから, Step 1 の (1) より,  $|G(x, \varphi(x))| \leq \delta$  となり,

$$\max_{|x| \leq r} |(T\varphi)(x)| \leq \delta$$

が成り立ち,  $T\varphi \in X$  となることが分かる. したがって,  $T$  は  $X$  から  $X$  への写像になっている. これが縮小写像になっていることは, 次のようにして分かる.  $\varphi, \psi \in X$  とすると,  $|x| \leq r$  を満たす任意の  $x$  に対して,  $|\varphi(x)| \leq \delta, |\psi(x)| \leq \delta$  であるから, Step 1 の (2) より

$$\begin{aligned} |(T\varphi)(x) - (T\psi)(x)| &= |G(x, \varphi(x)) - G(x, \psi(x))| \\ &\leq \frac{1}{2} |\varphi(x) - \psi(x)| \end{aligned}$$

となり,

$$\max_{|x| \leq r} |(T\varphi)(x) - (T\psi)(x)| \leq \frac{1}{2} \max_{|x| \leq r} |\varphi(x) - \psi(x)| \quad \therefore \quad d(T\varphi, T\psi) \leq \frac{1}{2} d(\varphi, \psi)$$

が成り立つ．以上のことから， $T$  が  $X$  から  $X$  への縮小写像であることが分かった．距離空間  $(X, d)$  は完備であるから，縮小写像の原理（定理 5.2）を適用することができ， $T$  は  $X$  において唯一つの不動点  $\varphi \in X$  を持つことが分かる．

$$\begin{aligned} T\varphi = \varphi &\Leftrightarrow G(x, \varphi(x)) = \varphi(x) \quad (|x| \leq r) \\ &\Leftrightarrow f(x, \varphi(x)) = 0 \quad (|x| \leq r) \end{aligned}$$

に注意すれば，この関数  $\varphi$  が望みの陰関数であり，定理 2.1 の (1) および (2) を満たすことが分かる．

Step 3 いま求めた陰関数  $\varphi$  が  $C^1$  級であることを示すことが残っている（それが示されれば，定理 2.1 の (3) および (4) が成り立つことは明らかであろう．） $|x| < r$  を満たす  $x$  を任意に固定しよう．Step 1 での計算より，

$$|f_y(x, \varphi(x))| \geq |f_y(0, 0)| - |f_y(x, \varphi(x)) - f_y(0, 0)| \geq \frac{1}{|A|} - \frac{1}{2|A|} = \frac{1}{2|A|} > 0$$

特に， $f_y(x, \varphi(x)) \neq 0$  が成り立っていることに注意する．そこで，

$$p := -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}$$

とおき，

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = p$$

となることを示そう． $f$  が  $C^1$  級であることから，Taylor の定理より，十分小さな任意の実数  $h, k$  に対して

$$\begin{aligned} f(x+h, \varphi(x)+k) &= f(x, \varphi(x)) + f_x(x, \varphi(x))h + f_y(x, \varphi(x))k + R(h, k) \\ &= f_x(x, \varphi(x))h + f_y(x, \varphi(x))k + R(h, k) \end{aligned}$$

ただし，

$$\frac{R(h, k)}{|h| + |k|} \rightarrow 0 \quad (|h| + |k| \rightarrow 0)$$

が成り立つ．上の計算では  $\varphi(x)$  が陰関数であることを用いた．したがって，任意の正数  $\varepsilon$  に対して，十分小さな正数  $\delta_0$  が存在して， $|h|, |k| \leq \delta_0$  を満たす任意の実数  $h, k$  に対して

$$|f(x+h, \varphi(x)+k) - f_x(x, \varphi(x))h - f_y(x, \varphi(x))k| \leq \varepsilon(|h| + |k|)$$

が成り立つ．一方， $\varphi$  の  $x$  における連続より，この正数  $\delta_0$  に対して十分小さな正数  $r_0 \in (0, \delta_0]$  が存在して，

$$|h| \leq r_0 \Rightarrow |\varphi(x+h) - \varphi(x)| \leq \delta_0$$

が成り立つ．そこで，

$$\Delta_h \varphi := \varphi(x+h) - \varphi(x)$$

とおくと， $|h| \leq r_0$  であるかぎり  $|\Delta_h \varphi| \leq \delta_0$  となり，上式において  $k = \Delta_h \varphi$  とすることができる．このとき，

$$f(x+h, \varphi(x)+k) = f(x+h, \varphi(x+h)) = 0$$

となることに注意すれば,

$$|h| \leq r_0 \Rightarrow |f_x(x, \varphi(x))h + f_y(x, \varphi(x))\Delta_h\varphi| \leq \varepsilon(|h| + |\Delta_h\varphi|)$$

が成り立つ. また, 先の計算より

$$\frac{1}{|f_y(x, \varphi(x))|} \leq 2|A|$$

も成り立っている. したがって,  $|h| \leq r_0$  であれば

$$\begin{aligned} |\Delta_h\varphi - ph| &= \left| \Delta_h\varphi + \frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}h \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{|f_y(x, \varphi(x))|} (|h| + |\Delta_h\varphi|) \\ &\leq 2|A|\varepsilon(|h| + |\Delta_h\varphi|) \\ &\leq 2|A|\varepsilon(|h| + |\Delta_h\varphi - ph| + |ph|) \\ &\leq 2|A|\varepsilon|\Delta_h\varphi - ph| + 2|A|(1 + |p|)|h|\varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ. したがって,  $2|A|\varepsilon \leq \frac{1}{2}$  であれば, 上式の右辺第一項目を左辺に移項することにより

$$|\Delta_h\varphi - ph| \leq 4|A|(1 + |p|)|h|\varepsilon$$

が成り立つ. 以上のことをまとめると, 任意の正数  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4|A|}]$  に対して, 十分小さな正数  $r_0$  が存在し,  $0 < |h| \leq r_0$  を満たす任意の実数  $h$  に対して

$$\left| \frac{\Delta_h\varphi}{h} - p \right| \leq 4|A|(1 + |p|)\varepsilon$$

が成り立つ. これは

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h\varphi}{h} = p = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}$$

となることを示している. したがって,  $\varphi$  は  $x$  において微分可能であり,

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}$$

となることが分かる. この式の右辺は  $x$  の連続関数であるから,  $\varphi$  も  $C^1$  級であることが示された (証明終)