

数学解析第1 第13回講義ノート

定義 7.6 (面積分)  $\Omega$  を  $\mathbb{R}^3$  の領域,  $f$  を  $\Omega$  で定義された連続関数,  $A$  を  $\Omega$  内の  $C^1$  級曲面で

$$A: \mathbf{x} = \varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v)) \quad ((u, v) \in D)$$

とパラメーター表示されているとする. ただし,  $D$  は  $\mathbb{R}^2$  の領域である ( $A$  が  $C^1$  級であるとは, このパラメーター表示にあらわれる関数  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  が  $C^1$  級であることを意味する.) このとき,  $f$  の  $A$  上の面積分を次式で定める.

$$\iint_A f dS := \iint_D f(\varphi(u, v)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| du dv$$

面積分にあらわれる  $dS$  は曲面  $A$  の面積要素と呼ばれており, 形式的には

$$dS = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| du dv$$

と書かれる. この表示にあらわれている外積を計算してみよう.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{e}_1 \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{vmatrix} + \mathbf{e}_2 \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \end{vmatrix} + \mathbf{e}_3 \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial(\varphi_2, \varphi_3)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(\varphi_3, \varphi_1)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(u, v)} \right) \end{aligned}$$

したがって,

$$dS = \sqrt{\left( \frac{\partial(\varphi_2, \varphi_3)}{\partial(u, v)} \right)^2 + \left( \frac{\partial(\varphi_3, \varphi_1)}{\partial(u, v)} \right)^2 + \left( \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(u, v)} \right)^2} du dv$$

と書くこともできる.

さて, 曲面のパラメーター表示は一通りではなく, 一般に何通りもある. また, 人によって異なるパラメーター表示を使ったりする. 上で定義した面積分もまた線積分と同じように, 実はどんなパラメーター表示を使っても同じ値になり, 関数  $f$  と曲面  $A$  からだけで決まる事が確かめられる. 実際,

$$A: \mathbf{x} = \psi(r, s) = (\psi_1(r, s), \psi_2(r, s), \psi_3(r, s)) \quad ((r, s) \in E)$$

という別のパラメーター表示があったとしよう. ここで,  $E$  は  $\mathbb{R}^2$  の領域である. このとき,  $\varphi(u, v) = \psi(r, s)$  という関係式から,  $(u, v)$  と  $(r, s)$  の間に対応がある. それを  $(u, v) = \Phi(r, s) = (\Phi_1(r, s), \Phi_2(r, s))$  と書けば,  $\Phi: E \rightarrow D$  は全単射な写像となる. そこで, 上で

定義した面積分において,  $(u, v) = (\Phi_1(r, s), \Phi_2(r, s))$  という積分変数の変換を行おう. このとき, 変換の Jacobian を計算すると

$$dudv = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial s} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial s} \end{pmatrix} \right| drds = \left| \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2)}{\partial(r, s)} \right| drds \quad (7.3)$$

が成り立つ. また,  $\psi(r, s) = \varphi(u, v) = \varphi(\Phi_1(r, s), \Phi_2(r, s))$  の両辺を  $r$  および  $s$  で微分すると,

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \Phi_2}{\partial r}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \Phi_1}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \Phi_2}{\partial s}$$

が成り立つ. ここで, 外積の基本的な性質  $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$  および  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$  を用いると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial r} \times \frac{\partial \psi}{\partial s} &= \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \times \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial s} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial s} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \\ &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial s} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \frac{\partial \Phi_2}{\partial s} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \\ &\quad + \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial s} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \frac{\partial \Phi_2}{\partial s} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \\ &= \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \frac{\partial \Phi_2}{\partial s} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial s} \right) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \\ &= \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2)}{\partial(r, s)} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \end{aligned}$$

が成り立つ. これと (7.3) より

$$\left\| \frac{\partial \psi}{\partial r} \times \frac{\partial \psi}{\partial s} \right\| drds = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| \left| \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2)}{\partial(r, s)} \right| drds = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| dudv$$

が得られる. さらに,  $f(\varphi(\Phi(r, s))) = f(\psi(r, s))$  に注意すれば,

$$\iint_D f(\varphi(u, v)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| dudv = \iint_E f(\psi(r, s)) \left\| \frac{\partial \psi}{\partial r}(r, s) \times \frac{\partial \psi}{\partial s}(r, s) \right\| drds$$

となり, 同じ値になることが確かめられた.

大域的なパラメーター表示をもたないような一般の曲面上の面積分は, その曲面を上記のようにパラメーター表示できるような有限個の曲面に分割し, それら個々の曲面上の面積分の総和として定義される.

$f(x) \equiv 1$  のとき, 面積分  $\iint_A dS$  の値を曲面  $A$  の曲面積 (表面積) という.

曲面  $A$  がグラフになっている場合の面積分の式を導出しておこう.

$$A: x_3 = \psi(x_1, x_2) \quad ((x_1, x_2) \in D)$$

とすると, 曲面  $A$  は  $\mathbf{x} = \varphi(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \psi(x_1, x_2))$  ( $(x_1, x_2) \in D$ ) とパラメーター表示されるので,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = (1, 0, \psi_{x_1}), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = (0, 1, \psi_{x_2}) \quad \therefore \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = (-\psi_{x_1}, -\psi_{x_2}, 1)$$

したがって,

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{(-\psi_{x_1})^2 + (-\psi_{x_2})^2 + 1} dx_1 dx_2 \\ &= \sqrt{|\nabla\psi(x_1, x_2)|^2 + 1} dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

となり

$$\iint_A f dS = \iint_D f(x_1, x_2, \psi(x_1, x_2)) \sqrt{|\nabla\psi(x_1, x_2)|^2 + 1} dx_1 dx_2$$

が得られる.

以上の準備の下, Stokes の定理と Gauss の定理 (発散定理) を紹介しよう.

**定理 7.6 (Stokes の定理)**  $\Omega$  を  $\mathbf{R}^3$  の領域,  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  を  $\Omega$  で定義された  $C^1$  級のベクトル場,  $A$  を  $\Omega$  内の向き付け可能な  $C^2$  級の曲面で, その境界  $C = \partial A$  は  $C^1$  級の閉曲線とする. このとき,

$$\iint_A (\text{rot } \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x}$$

が成り立つ. ただし,  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$  は曲面  $A$  の裏から表へ向かう  $A$  上の単位法線ベクトルであり, 曲線  $C$  は曲面  $A$  の表を左に見てまわるように向き付けられているとする.

**証明** 曲面  $A$  が次のようにパラメーター表示されている場合を証明しよう.

$$A: \mathbf{x} = \varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v)) \quad ((u, v) \in D)$$

より一般の場合は, このようにパラメーター表示される有限個の曲面に分割し, そのおののに対して Stokes の定理を適用すればよい. さて, このとき面積要素は次式で与えられる.

$$dS = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| du dv$$

また, 単位法線ベクトルは

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\|}$$

である.(向きが逆向きになっている場合は,  $u$  と  $v$  を予め入れ替えておけばよい.) したがって,

$$\begin{aligned} \iint_A (\text{rot } \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS &= \iint_D (\text{rot } \mathbf{u})(\varphi(u, v)) \cdot \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right) du dv \\ &= \iint_D \left\{ \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) (\varphi(u, v)) \frac{\partial(\varphi_2, \varphi_3)}{\partial(u, v)} \right. \\ &\quad + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) (\varphi(u, v)) \frac{\partial(\varphi_3, \varphi_1)}{\partial(u, v)} \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) (\varphi(u, v)) \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(u, v)} \right\} du dv \end{aligned}$$

ここで, 領域  $D$  上の関数  $f_1, f_2$  を

$$f_1(u, v) := \mathbf{u}(\varphi(u, v)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \quad f_2(u, v) := \mathbf{u}(\varphi(u, v)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)$$

と定めよう．簡単のために，変数を省略して書くことにすると，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_2}{\partial u} - \frac{\partial f_1}{\partial v} &= \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3} \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\
&\quad - \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3} \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \\
&= \left\{ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \right. \\
&\quad + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \right) \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \\
&\quad + \left. \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \right) \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \right\} \\
&\quad - \left\{ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \right. \\
&\quad + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \right) \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \\
&\quad + \left. \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \right) \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \right\} \\
&= \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \right) + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \right) \\
&\quad + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \right) + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \right) \\
&\quad + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \right) + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \right) \\
&= \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \frac{\partial(\varphi_2, \varphi_3)}{\partial(u, v)} + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \frac{\partial(\varphi_3, \varphi_1)}{\partial(u, v)} \\
&\quad + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(u, v)}
\end{aligned}$$

となるので，

$$\iint_A (\text{rot } \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_D \left( \frac{\partial f_2}{\partial u} - \frac{\partial f_1}{\partial v} \right) \, dudv = \int_{\partial D} f_1 du + f_2 dv$$

が成り立つ．この最後の等式では Green の定理を用いた．この右辺の線積分を計算するために，領域  $D$  の境界  $\partial D$  は

$$\partial D : (u, v) = \phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t)) \quad (a \leq t \leq b)$$

とパラメーター表示されているとしよう．このとき，曲面  $A$  の境界  $C$  は

$$C : \mathbf{x} = \varphi(\phi(t)) =: \psi(t)$$

とパラメーター表示される．したがって，

$$\begin{aligned} \iint_A (\text{rot } \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \, dS &= \int_a^b \{f_1(\phi(t))\phi_1'(t) + f_2(\phi(t))\phi_2'(t)\} dt \\ &= \int_a^b \mathbf{u}(\varphi(\phi(t))) \cdot \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u}(\phi(t))\phi_1'(t) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(\phi(t))\phi_2'(t) \right) dt \\ &= \int_a^b \mathbf{u}(\psi(t)) \cdot \psi'(t) dt = \int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} \end{aligned}$$

となり，望みの式が示された（証明終）

定理 7.7 (Gauss の定理)  $\Omega$  を  $\mathbb{R}^3$  の領域， $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  を  $\Omega$  で定義された  $C^1$  級のベクトル場， $V$  をその閉包  $\bar{V}$  が  $\Omega$  に含まれる有界領域で，その境界  $A = \partial V$  は  $C^1$  級の曲面とする．このとき，

$$\iiint_V \text{div } \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \iint_A \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \, dS$$

が成り立つ．ただし， $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 dx_3$ ， $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$  は曲面  $A$  の裏から表へ向かう  $A$  上の単位法線ベクトルである．

Gauss の定理はナブラ記号を用いて

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \iint_A \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \, dS$$

と書くことが出来る．ナブラ記号  $\nabla$  を単位外法線ベクトル  $\mathbf{n}$  に置き換え，体積積分を面積積分に変えると覚えておくとよい．

証明 Green の定理の証明と同様に，領域  $V$  が

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2) \in D, \varphi(x_1, x_2) < x_3 < \psi(x_1, x_2)\}$$

という形をしている場合に証明しよう．ただし， $\varphi, \psi$  は  $\mathbb{R}^2$  の領域  $D$  の閉包  $\bar{D}$  で定義された  $C^1$  級関数であり， $\varphi(x_1, x_2) \leq \psi(x_1, x_2)$  ( $(x_1, x_2) \in D$ ) を満たしているとする．さらに，領域  $D$  の境界  $C = \partial D$  は  $C^1$  級の向き付けられた閉曲線で，

$$C : (x_1, x_2) = \phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t)) \quad (a \leq t \leq b)$$

とパラメーター表示されているとする．曲面  $A_1, A_2, A_3$  をそれぞれ

$$\begin{aligned} A_1 : x_3 &= \varphi(x_1, x_2) & (x_1, x_2) &\in D \\ A_2 : x_3 &= \psi(x_1, x_2) & (x_1, x_2) &\in D \\ A_3 : \mathbf{x} &= (\phi(t), x_3) & a \leq t \leq b, \varphi(\phi(t)) &\leq x_3 \leq \psi(\phi(t)) \end{aligned}$$

で定めれば，領域  $V$  の境界  $A$  は  $A = A_1 + A_2 + A_3$  で与えられる．実際， $A_1$  は  $V$  の下側の曲面， $A_2$  は  $V$  の上側の曲面， $A_3$  は  $V$  の側面になっている．それぞれの曲面上での面積積分を先に計算しよう．曲面  $A_1$  上では，

$$\mathbf{n} = \frac{(\varphi_{x_1}(x_1, x_2), \varphi_{x_2}(x_1, x_2), -1)}{\sqrt{|\nabla \varphi(x_1, x_2)|^2 + 1}}, \quad dS = \sqrt{|\nabla \varphi(x_1, x_2)|^2 + 1} \, dx_1 dx_2$$

であるから

$$\iint_{A_1} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \, dS = \iint_D \left\{ u_1(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, x_2) + u_2(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x_1, x_2) - u_3(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2)) \right\} dx_1 dx_2$$

曲面  $A_2$  上では,

$$\mathbf{n} = \frac{(-\psi_{x_1}(x_1, x_2), -\psi_{x_2}(x_1, x_2), 1)}{\sqrt{|\nabla \psi(x_1, x_2)|^2 + 1}}, \quad dS = \sqrt{|\nabla \psi(x_1, x_2)|^2 + 1} \, dx_1 dx_2$$

であるから

$$\iint_{A_2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \, dS = \iint_D \left\{ -u_1(x_1, x_2, \psi(x_1, x_2)) \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x_1, x_2) - u_2(x_1, x_2, \psi(x_1, x_2)) \frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x_1, x_2) + u_3(x_1, x_2, \psi(x_1, x_2)) \right\} dx_1 dx_2$$

曲面  $A_3$  上では,

$$\mathbf{n} = \frac{(\phi'_2(t), -\phi'_1(t), 0)}{|\phi'(t)|}, \quad dS = |\phi'(t)| \, dt dx_3$$

であるから

$$\iint_{A_3} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \, dS = \int_a^b \left( \int_{\varphi(\phi(t))}^{\psi(\phi(t))} \{ u_1(\phi(t), x_3) \phi'_2(t) - u_2(\phi(t), x_3) \phi'_1(t) \} dx_3 \right) dt$$

次に, 体積積分を計算しよう.

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \iiint_V \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \, d\mathbf{x} + \iiint_V \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \, d\mathbf{x} + \iiint_V \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \, d\mathbf{x}$$

以下では, 個々の体積積分を計算していく.

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \, d\mathbf{x} &= \iint_D \left( \int_{\varphi(x_1, x_2)}^{\psi(x_1, x_2)} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) dx_3 \right) dx_1 dx_2 \\ &= \iint_D (u_3(x_1, x_2, \psi(x_1, x_2)) - u_3(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2))) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

次に, 領域  $D$  上の関数  $f_1, f_2$  を

$$f_j(x_1, x_2) := \int_{\varphi(x_1, x_2)}^{\psi(x_1, x_2)} u_j(x_1, x_2, x_3) dx_3 \quad (j = 1, 2)$$

と定めよう. このとき, 補題 7.1 より

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x_1, x_2) &= \int_{\varphi(x_1, x_2)}^{\psi(x_1, x_2)} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}(x_1, x_2, x_3) dx_3 \\ &\quad + u_j(x_1, x_2, \psi(x_1, x_2)) \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x_1, x_2) - u_j(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x_1, x_2) \end{aligned}$$

であるから,  $j = 1, 2$  に対して

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial u_j}{\partial x_j} d\mathbf{x} &= \iint_D \left( \int_{\varphi(x_1, x_2)}^{\psi(x_1, x_2)} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}(x_1, x_2, x_3) dx_3 \right) dx_1 dx_2 \\ &= \iint_D \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &\quad + \iint_D \left( u_j(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x_1, x_2) - u_j(x_1, x_2, \psi(x_1, x_2)) \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x_1, x_2) \right) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

が成り立つ. さらに, Green の定理より

$$\begin{aligned} \iint_D \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 &= \int_C (-f_2) dx_1 + f_1 dx_2 \\ &= \int_a^b (-f_2(\phi(t))\phi_1'(t) + f_1(\phi(t))\phi_2'(t)) dt \\ &= \int_a^b \left( \int_{\varphi(\phi(t))}^{\psi(\phi(t))} \{u_1(\phi(t), x_3)\phi_2'(t) - u_2(\phi(t), x_3)\phi_1'(t)\} dx_3 \right) dt \end{aligned}$$

以上の計算をまとめると,

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} &= \iint_{A_1} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} dS + \iint_{A_2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} dS + \iint_{A_3} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} dS \\ &= \iint_A \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} dS \end{aligned}$$

となり, 望みの等式が示された (証明終)