

- 1 次の $u = u(x, t)$ ($x \in \mathbf{R}, t > 0$) に対する非粘性 Burgers 方程式を考える .

$$u_t + uu_x = 0$$

- (1) $\mathbf{R} \times (0, \infty)$ 上のテスト関数の空間を C_0^∞ とおく, すなわち, $\phi = \phi(x, t) \in C_0^\infty$ は $\mathbf{R} \times (0, \infty)$ 上の無限回微分可能な関数で, $\mathbf{R} \times (0, \infty)$ のある有界な閉集合 (コンパクト集合) の外では恒等的に零である .

$u = u(x, t) \in C^1(\mathbf{R} \times (0, \infty))$ を非粘性 Burgers 方程式の解とすると, 任意の $\phi \in C_0^\infty$ に対して次式が成り立つことを示せ .

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u\phi_t + \frac{1}{2}u^2\phi_x) dxdt = 0$$

ヒント: $uu_x = \frac{1}{2}(u^2)_x$ に注意して部分積分を用いよ .

注意: 逆に, 任意の $\phi \in C_0^\infty$ に対して上式が成り立つとき, 関数 $u = u(x, t)$ を非粘性 Burgers 方程式の弱解 (weak solution) という . 上式には u の導関数が現れていないことに注目せよ .

- (2) u_l, u_r, s を実定数とし, $\mathbf{R} \times (0, \infty)$ 上の関数 $u = u(x, t)$ を

$$u(x, t) := \begin{cases} u_l & x < st \\ u_r & x > st \end{cases}$$

により定める . この関数が非粘性 Burgers 方程式の弱解になるための必要かつ十分な条件は

$$(u_l - u_r)s = \frac{1}{2}(u_l^2 - u_r^2)$$

であることを示せ .

ヒント: 弱解の定義式の積分を $\{(x, t) \mid x > st\}$ および $\{(x, t) \mid x < st\}$ 上の積分に分割し (これらの領域上では u は定数である) そのおののにおいて Green の定理を用いよ .

注意: この条件を Rankine-Hugoniot 条件という .

レポート作成上の注意

- A 4 版のレポート用紙を使用し, 表紙を付けること . 表紙には科目名, レポート番号, 学籍番号, 氏名を記入すること .
- 最終的な答えだけでなく, 途中計算を分かりやすく説明すること .
- ワードプロ, TEX 等は使用せず, 手書きで (丁寧な字で) 作成すること .
- レポートは次回の講義終了後に回収する .