

1 $u \in C^1([a, b])$ および $\varphi, \psi \in C([a, b])$ が

$$u'(x) \leq \varphi(x)u(x) + \psi(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

を満たしているとき，次式が成り立つことを示せ．

$$u(x) \leq e^{\int_a^x \varphi(y)dy} u(a) + \int_a^x e^{\int_y^x \varphi(z)dz} \psi(y)dy \quad (a \leq x \leq b)$$

ヒント：与えられた不等式の両辺に $e^{-\int_a^x \varphi(y)dy}$ を掛けて整理せよ．

2 $u, \varphi, \psi \in C([a, b])$ および $\varphi(x) \geq 0$ ($a \leq x \leq b$) とする．

(1)

$$u(x) \leq \varphi(x) \int_a^x u(y)dy + \psi(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

ならば，次式が成り立つことを示せ．

$$u(x) \leq \varphi(x) \int_a^x e^{\int_y^x \varphi(z)dz} \psi(y)dy + \psi(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

ヒント： $v(x) := \int_a^x u(y)dy$ とおき， $v(x)$ に対する微分不等式を求めよ．

(2) さらに $\psi \in C^1([a, b])$ を仮定する．

$$u(x) \leq \int_a^x \varphi(y)u(y)dy + \psi(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

ならば，次式が成り立つことを示せ．

$$u(x) \leq e^{\int_a^x \varphi(z)dz} \psi(a) + \int_a^x e^{\int_y^x \varphi(z)dz} \psi'(y)dy \quad (a \leq x \leq b)$$

ヒント： $w(x) := \int_a^x \varphi(y)u(y)dy$ とおき， $w(x)$ に対する微分不等式を求めよ．

レポート作成上の注意

- A 4 版のレポート用紙を使用し，表紙を付けること（学事センターにある所定の表紙を使う必要はない。）表紙には科目名，レポート番号，学籍番号，氏名，所属学科を記入すること．
- 最終的な答えだけでなく，途中計算を分かりやすく説明すること．
- ワープロ，T E X 等は使用せず，手書きで（丁寧な字で）作成すること．
- レポートは次回の講義終了後に回収する．