

1 $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T$ に対する 1 階斉次線形常微分方程式系

$$\frac{d\mathbf{u}}{dx}(x) = A(x)\mathbf{u}(x) \quad (x \in \mathbf{R}) \quad \dots \quad (*)$$

を考える。ただし, $A(x) = (a_{ij}(x))$, $a_{ij} \in C(\mathbf{R})$ ($1 \leq i, j \leq n$) とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in C^1(\mathbf{R})$ を, それぞれ (*) の解とし, それらの Wronskian を $W(x) = \det(\mathbf{u}_1(x), \dots, \mathbf{u}_n(x))$ により定める。このとき,

$$\frac{dW}{dx}(x) = (\operatorname{tr} A(x))W(x)$$

が成り立つことを示せ。ただし, $\operatorname{tr} A$ は行列 $A = (a_{ij})$ のトレースである。すなわち, $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ 。

- (2) $X = \{\mathbf{u} \in C^1(\mathbf{R}); \mathbf{u} \text{ は } (*) \text{ を満たす}\}$ は, 線形空間 $C^1(\mathbf{R})$ の n 次元線形部分空間となることを示せ。

レポート作成上の注意

- A 4 版のレポート用紙を使用し, 表紙を付けること (学事センターにある所定の表紙を使う必要はない。) 表紙には科目名, レポート番号, 学籍番号, 氏名, 所属学科を記入すること。
- 最終的な答えだけでなく, 途中計算を分かりやすく説明すること。
- ワープロ, T E X 等は使用せず, 手書きで (丁寧な字で) 作成すること。
- レポートは次回の講義終了後に回収する。