

1 $u \in C^1([a, b])$ および $\varphi, \psi \in C([a, b])$ が

$$u'(x) \leq \varphi(x)u(x) + \psi(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

を満たしているとき, 次式が成り立つことを示せ.

$$u(x) \leq e^{\int_a^x \varphi(y)dy} u(a) + \int_a^x e^{\int_y^x \varphi(z)dz} \psi(y)dy \quad (a \leq x \leq b)$$

ヒント: 与えられた不等式の両辺に $e^{-\int_a^x \varphi(y)dy}$ を掛けて整理せよ.

2 $u, \varphi, \psi \in C([a, b])$ および $\varphi(x) \geq 0$ ($a \leq x \leq b$) とする.

(1)

$$u(x) \leq \varphi(x) \int_a^x u(y)dy + \psi(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

ならば, 次式が成り立つことを示せ.

$$u(x) \leq \varphi(x) \int_a^x e^{\int_y^x \varphi(z)dz} \psi(y)dy + \psi(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

ヒント: $v(x) := \int_a^x u(y)dy$ とおき, $v(x)$ に対する微分不等式を求めよ.

(2) さらに $\psi \in C^1([a, b])$ を仮定する.

$$u(x) \leq \int_a^x \varphi(y)u(y)dy + \psi(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

ならば, 次式が成り立つことを示せ.

$$u(x) \leq e^{\int_a^x \varphi(z)dz} \psi(a) + \int_a^x e^{\int_y^x \varphi(z)dz} \psi'(y)dy \quad (a \leq x \leq b)$$

ヒント: $w(x) := \int_a^x \varphi(y)u(y)dy$ とおき, $w(x)$ に対する微分不等式を求めよ.

レポート作成上の注意

- A4版のレポート用紙を使用し, 表紙を付けること (学事センターにある所定の表紙を使う必要はない.) 表紙には科目名, レポート番号, 学籍番号, 氏名, 所属学科を記入すること.
- 最終的な答えだけでなく, 途中計算を分かりやすく説明すること.
- ワードプロ, TEX等は使用せず, 手書きで (丁寧な字で) 作成すること.
- レポートは次回の講義終了後に回収する.