12. ガロア理論の圏論的定式化

12.1. **圏の言葉.** 以下、$\mathcal{C}$ を圏とする。

定義 12.1. $\mathcal{C}$ 内の射 $f : X \to Y$ を考える。任意の２つの射 $u, v : T \to X$ に対して

$$f \circ u = f \circ v \Rightarrow u = v$$

が成り立つとき、f は単射であると言う。

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, shift left, bend left, "u"] \arrow[r, shift right, bend right, "v"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

また、任意の２つの射 $u, v : Y \to T$ に対して

$$u \circ f = v \circ f \Rightarrow u = v$$

が成り立つとき、f は全射であると言う。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, shift left, bend left, "u"] \arrow[r, shift right, bend right, "v"'] & T \end{tikzcd}$$

定義 12.2. $\mathcal{C}$ を圏とする。$\mathcal{C}$ 内の２つの射 $f, g : X \to Y$ を考える。任意の２つの射 $u, v : T \to X$ に対して

$$f \circ u = f \circ v \Rightarrow g \circ u = g \circ v$$

が成り立つとき、$f \downarrow g$ と記す。$f : X \to Y$ が単射であり、任意の $g : X \to W$ に対して $f \downarrow g$ ならば f は g を経由するとき、f は strictly monomorphic であると言う。

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, shift left, bend left, "u"] \arrow[r, shift right, bend right, "v"'] & X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & Y \arrow[d, dashed, "\exists h"] \\ & & W \end{tikzcd}$$

定義 12.3. $\mathcal{C}$ を圏とする。$\mathcal{C}$ 内の２つの射 $f, g : X \to Y$ を考える。任意の２つの射 $u, v : T \to X$ に対して

$$u \circ f = v \circ f \Rightarrow u \circ g = v \circ g$$

が成り立つとき、$f \uparrow g$ と記す。$f : X \to Y$ が全射であり、任意の $g : W \to X$ に対して $f \uparrow g$ ならば f は g を経由するとき、f は strict epimorphism であると言う。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, bend right, "v"'] & T \\ W \arrow[u, dashed, "\exists h"] \arrow[ur, "g"'] & & \end{tikzcd}$$

補題 12.4. $f : X \to Y$ が単射であり、*stirict epimorphism* であれば、同型である。

証明. $f : X \to Y$ とする。$\mathrm{id}_Y : Y \to Y$ を考えると、f は特に全射であることから、$f \uparrow \mathrm{id}_Y$ である。すると f がstrict epimorphic であることから、$h : Y \to X$ が存在して、$f \circ h = \mathrm{id}_Y$ となる。いま、$f : X \to Y$ をこの式に合成すると、

$$f \circ h \circ f = \mathrm{id}_Y \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_X$$

となる。f が単射であることから、$h \circ f = \mathrm{id}_X$ を得る。h が f の逆射になることから、f は同型であることが導かれる。 □

12.2. **ガロア圏の定義と証明.** $\mathcal{C}$ を圏として、A を $\mathcal{C}$ の対象とする。$\mathcal{C}$ と A は以下の性質をみたすと仮定する。

(RC0) 任意の $\mathcal{C}$ の対象 X に対して、射 $x : A \to X$ が存在する。この様な射は全て strict epimorphism である。

(RC1) 任意の部分群 $H \subset \mathrm{Aut}(A)$ に対して、商対象 $A \to A/H$ が $\mathcal{C}$ 内で存在する。この商対象は $[A, -]$ で保たれる。

(RC2) A の任意の自己準同型は同型である。すなわち、$[A, A] = \mathrm{Aut}(A)$ が成り立つ。

この様な性質をもつ圏 $\mathcal{C}$ に対して、以下が示される。

補題 12.5. 圏 $\mathcal{C}$ の任意の射 $f : X \to Y$ は *strict epimorphism* である。

Proof. (RC0) より strict epimorphism $x : A \to X$ が存在し、合成 $y := f \circ x : A \to Y$ も strict epimorphism となる。合成 y が epimorphism であることから、f が epimorphism であることが導かれる。いま、$g : W \to Y$ に対して、$f \uparrow g$ が成り立つと仮定する。すると、任意の $u, v : Y \to T$ に対して $u \circ f = v \circ f$ ならば $u \circ g = v \circ g$ が成り立つ。ここで、

$u \circ y = v \circ y$ と仮定すると、$u \circ f \circ x = u \circ y = v \circ y = v \circ f \circ x$ となり、x が全射であることから $u \circ f = v \circ f$、すなわち $u \circ g = v \circ g$ が導かれる。従って $y \uparrow g$ である。

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "x"] \arrow[dr, "y"] & & \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & T \\
W \arrow[u, dashed, "\exists h"'] \arrow[ur, "g"'] \arrow[uu, bend left, "\exists h'"] & &
\end{tikzcd}
$$

y が strict epimorphism であることから、$h' : W \to A$ が存在して $y \circ h' = g$ が成り立つ。いま、$h := x \circ h' : W \to X$ とおくと、$f \circ h = f \circ x \circ h' = y \circ h' = g$ となる。以上より、f が strict epimorphism であることが示された。 □

命題 12.6. $(RC0)$ より、関手 $[A, -]$ は忠実で、単射と同型を反映（*reflect*）する。

※ reflect の意味は、関手で行った先がその性質を持っていれば、もとの対象や射もその性質を持っているということである。

証明. 関手 $F(-) := [A, -] : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et^G$ により誘導される写像

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et^G}(F(X), F(Y))$$

が単射であることを示す。$f, g : X \to Y$ として、$F(f) = F(g) : F(X) \to F(Y)$ とする。いま (RC0) より $x \in F(X) = [A, X]$ が存在して、この射は strict epimorphism である。

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "x"] \arrow[dr, "y"] & \\
X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y
\end{tikzcd}
$$

仮定より $y = F(f)(x) = F(g)(x)$ となり、

$$f \circ x =: F(f)(x) = F(g)(x) := g \circ x \in [A, Y]$$

が成り立つ。特に x が全射であることから、$f = g$ が導かれる。

次に、$f : X \to Y$ に対して $F(f) : F(X) \to F(Y)$ が単射であると仮定する。2つの $\mathcal{C}$ の射 $u, v : T \to X$ に対して $f \circ u = f \circ v$ が成り立つとすると、$F(f) \circ F(u) = F(f) \circ F(v)$

となることから、$F(f)$ の単射性より $F(u) = F(v)$ が導かれる。従って、F が忠実であることから $u = v$ となる。以上より、f が単射であることが示された。

最後に、$f : X \to Y$ に対して $F(f) : F(X) \to F(Y)$ が同型であると仮定する。いままでの議論より $f : X \to Y$ は単射であり、f は strict epimorphism であることから、f は同型であることが導かれる。 $\square$

命題 12.7. 任意の $\mathcal{C}$ の対象 X は、$A \xrightarrow{x} X$ に対して $H := \mathrm{Stab}(x) \subset \mathrm{Aut}(A)$ とおくと、A/H と同型になる。

証明. $A \to A/H$ を考えると、$H := \mathrm{Stab}(x)$ より

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "x"] \arrow[dr, "q"'] & X \\ & A/H \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

が可換となる射 $i : A/H \to X$ が存在する。この図式に関手 $F(-) = [A, -]$ を施すと、

$$\begin{tikzcd} {[A,A]} \arrow[r, "F(x)"] \arrow[d] & {[A,X]} \\ {[A,A]/H} \arrow[r, "F(r)"'] \arrow[ur, "\varepsilon"] & {[A,A/H]} \arrow[u, "i_*"'] \end{tikzcd}$$

という図式を得る。(RC1) より $F(r)$ は同型になる。また、ε は単射である。この理由は、$a, b \in [A, A]$ に対して $F(x)(a) = F(x)(b)$ とすると、$F(x)$ の定義より

$$x \circ a = x \circ b \tag{12.8}$$

となる。(RC2) より $[A, A] = \mathrm{Aut}(A)$ となることから、$c \in [A, A]$ が存在して $b \circ c = \mathrm{id}_A$ が成り立つ。(12.8) にこれを合成すると、

$$x \circ a \circ c = x \circ b \circ c = x \circ \mathrm{id}_A = x$$

となる。従って、$a \circ c \in H = \mathrm{Stab}(x) \subset [A, A]$ となる。このことから、$a \equiv b \pmod H$ となり、ε が単射であることが示された。これから、$i_* := F(i)$ が単射となり、F が忠実であることから $i : A/H \to X$ も単射であることが従う。i は strict epimorphism であることから、i は同型であることが導かれる。 $\square$

命題 12.9. 関手 $F(-) = [A, -]$ は *strict epimorphism* を保つ。

証明. 任意の射 $f : X \to Y$ を考える。(RC0) より strict epimorphism $x : A \to X$ が存在して、$y = f \circ x : A \to Y$ も strict epimorphism になる。 $H := \mathrm{Stab}(y) \subset \mathrm{Aut}(A)$ とすると、Y は A/H と同型となり、$[A, A] \to [A, A]/H$ が全射であることから、$F(y) : [A, A] \to [A, Y] \cong [A, A]/H$ も全射となる。$F(f) \circ F(x) = F(y)$ が全射であることから、特に

$$F(f) : [A, X] \to [A, Y]$$

も全射になる。集合の圏では全射は strict epimorphism であることより、命題を得る。 □

命題 12.10. 任意の $\mathcal{C}$ の対象 X に対して、$\mathrm{Aut}(A)$ は $[A, X]$ に *transitive* に作用する。

Proof. (RC2) より $\mathrm{Aut}(A) = [A, A]$ が成り立つ。(RC0) より strict epimorphism $x : A \to X$ が存在する。$F(x) : [A, A] \to [A, X]$ は全射であることから、命題を得る。 □

定理 12.11. $\mathcal{C}$ を離散ガロア圏として、$A \in \mathcal{C}$ を考える。このとき、関手 $F(-)$ の左随伴関手 $G(-)$ が存在して、$\mathcal{C}$ と $t\mathcal{S}et^G$ は関手 F と G により圏同値になる。

証明. E を $\mathrm{Aut}(A) = [A, A]$ が可移に作用する集合とする。$x \in E$ に対して $H := \mathrm{Stab}(x) \subset \mathrm{Aut}(A)$ とすると、$[A, A]/H \cong E$ となる。(RC1) より $G(E) := A/H$ は $\mathcal{C}$ の対象である。この構成より関手 $G : t\mathcal{S}et^G \to \mathcal{C}$ が定義される。$E \cong [A, A]/H \cong [A, A/H] = F \circ G(E)$ となることから、関手の合成 $F \circ G = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ となる。同様に $\mathcal{C}$ の対象 X に対して $G \circ F(X)$ を計算する。(RC0) より strict epimorphism $x : A \to X$ が存在し、$F(X) := [A, X]$ より $x \in F(X)$ となる。$H := \mathrm{Stab}(x) \subset \mathrm{Aut}(A)$ と置くと、命題 12.7 より $G \circ F(X) = A/H \cong X$ を得る。 □