

ガロアの基本定理

December 13, 2012

<http://www.math.keio.ac.jp/~bannai/>

扱う内容

教科書 §2.1–§2.3 の内容

- ガロアの基本定理

TD 課題

問題 14. F を $f(X) = X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ の最小分解体とする。

- (1) 拡大 F/\mathbb{Q} がガロア拡大になる理由を説明できる様になる。
- (2) 拡大 F/\mathbb{Q} のガロア群がどういう群になるか、説明できる。
- (3) ガロアの基本的利を用いて、拡大 F/\mathbb{Q} の部分拡大を全て求めることができる様になる。

問題 15. F を $f(X) = X^8 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ の最小分解体とする。

- (1) 拡大 F/\mathbb{Q} がガロア拡大になる理由を説明できる様になる。
- (2) 拡大 F/\mathbb{Q} のガロア群がどういう群になるか、説明できる。
- (3) ガロアの基本的利を用いて、拡大 F/\mathbb{Q} の部分拡大を全て求めることができる様になる。

確認問題（来週提出）

問題 16. $F := \mathbb{Q}(t_1, t_2, t_3)$ として、 S_3 を 3 次対称群とする。このとき、 $s_1 = t_1 + t_2 + t_3$, $s_2 = t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3$, $s_3 = t_1 t_2 t_3$ として $K := \mathbb{Q}(s_1, s_2, s_3)$ と置くと、 F/K はガロア拡大で $\text{Gal}(F/K) = S_3$ となることを証明せよ。

ヒント：

- (1) 対称群 S_3 を t_1, t_2, t_3 に置換で作用させることにより、 $S_3 \subset \text{Aut}_{\mathbb{Q}}(F)$ と見なせる。
- (2) F は $f(X) = X^3 - s_1 X^2 + s_2 X - s_3 \in K[X]$ の最小分解体であることを利用する。
- (3) 作用により、 $K \subset F^{S_3}$ を示し、 F までの拡大次数を調べることにより、両者が一致することを示す。