

## ガロアの基本定理

December 13, 2012

<http://www.math.keio.ac.jp/~bannai/>

## 扱う内容

教科書 §2.1–§2.3 の内容

- ガロアの基本定理

## TD 課題

**問題 14.**  $F$  を  $f(X) = X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$  の最小分解体とする。

- (1) 拡大  $F/\mathbb{Q}$  がガロア拡大になる理由を説明できる様になる。
- (2) 拡大  $F/\mathbb{Q}$  のガロア群がどういう群になるか、説明できる。
- (3) ガロアの基本的利を用いて、拡大  $F/\mathbb{Q}$  の部分拡大を全て求めることができる様になる。

**問題 15.**  $F$  を  $f(X) = X^8 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$  の最小分解体とする。

- (1) 拡大  $F/\mathbb{Q}$  がガロア拡大になる理由を説明できる様になる。
- (2) 拡大  $F/\mathbb{Q}$  のガロア群がどういう群になるか、説明できる。
- (3) ガロアの基本的利を用いて、拡大  $F/\mathbb{Q}$  の部分拡大を全て求めることができる様になる。

## 確認問題（来週提出）

**問題 16.**  $F := \mathbb{Q}(t_1, t_2, t_3)$  として、 $S_3$  を 3 次対称群とする。このとき、 $s_1 = t_1 + t_2 + t_3$ ,  $s_2 = t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3$ ,  $s_3 = t_1 t_2 t_3$  として  $K := \mathbb{Q}(s_1, s_2, s_3)$  と置くと、 $F/K$  はガロア拡大で  $\text{Gal}(F/K) = S_3$  となることを証明せよ。

ヒント：

- (1) 対称群  $S_3$  を  $t_1, t_2, t_3$  に置換で作用させることにより、 $S_3 \subset \text{Aut}_{\mathbb{Q}}(F)$  と見なせる。
- (2)  $F$  は  $f(X) = X^3 - s_1 X^2 + s_2 X - s_3 \in K[X]$  の最小分解体であることを利用する。
- (3) 作用により、 $K \subset F^{S_3}$  を示し、 $F$  までの拡大次数を調べることにより、両者が一致することを示す。