

多変数のテーラー展開と極値問題 (2)

June 26, 2013

<http://www.math.keio.ac.jp/~bannai/>

Assignment

教科書教科書 §6.3–§6.4 を読んで、演習問題の問題 47(1)(3)、問題 49(1)(3)、問題 50(1)(3) の自分なりの解答を OCR 対応用紙に作成して、提出課題とし次回の講義の始めに提出してください。OCR 用紙の日付は、このプリントの日付 このプリントの日付 2013 年 6 月 26 日 として下さい。提出課題は返却しない予定です。必要であれば各自コピーを控えて下さい。教科書の問や章末の問題も試験範囲ですので各自やっておいてください。

演習問題

問題 46. 2 次形式 $f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ に対して以下が成り立つことを証明せよ。

- (1) $A > 0, AC - B^2 > 0$ ならば、任意の $(x, y) \neq (0, 0)$ に対して $f(x, y) > 0$ が成り立つ。
- (2) $A < 0, AC - B^2 > 0$ ならば、任意の $(x, y) \neq (0, 0)$ に対して $f(x, y) < 0$ が成り立つ。
- (3) $AC - B^2 < 0$ ならば、 $(x, y) \neq (0, 0)$ に対して $f(x, y)$ は正負両方の値を取る。

問題 47. 次の関数の停留点をすべて求めよ。

- (1) $f(x, y) = (x + y)e^{-xy}$
- (2) $f(x, y) = xy(a - x - y)$ 、ただし a は定数。
- (3) $f(x, y) = x^5 - x^2y + y^2$

問題 48. $f(x, y)$ を C^2 級関数とする。 $f(x, y)$ の Hessian を

$$H(x, y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

と定義する。点 $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ が $f(x, y)$ の停留点であるとき、以下を示せ。

- (1) $f_{xx}(a, b) > 0$ で $H(a, b) > 0$ ならば、 f はこの点で極小値。
- (2) $f_{xx}(a, b) < 0$ で $H(a, b) > 0$ ならば、 f はこの点で極大値。
- (3) $H(a, b) < 0$ ならば、 f はこの点で極値を取らない。
- (4) $H(a, b) = 0$ の場合、より高次の項をみないと判定ができない。

問題 49. 問題 47 の各関数の停留点に対して、Hessian $H(x, y)$ を計算せよ。

問題 50. 問題 47 の各関数に対して、極値となる点を求めよ。