

練習問題 1 (関数方程式概論)

- 1 $c \in \mathbf{R}$ および $f, g \in C^2(\mathbf{R})$ に対して, 関数 $u = u(x, t)$ ($x, t \in \mathbf{R}$) を

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

で定義する. このとき, u は次の 1 次元波動方程式を満たすことを示せ.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}.$$

- 2 $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ 上の関数 $E = E(x)$ ($x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$) を

$$E(x) = \begin{cases} \log |x| & (= \log \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) & \text{if } n = 2, \\ |x|^{2-n} & (= (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{(2-n)/2}) & \text{if } n \geq 3 \end{cases}$$

で定義する. このとき, E は次の Laplace 方程式を満たすことを示せ.

$$\Delta E = 0.$$

- 3 $\kappa > 0$ とする. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ および $t > 0$ の関数 $G = G(x, t)$ を

$$G(x, t) = \frac{1}{(4\kappa t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4\kappa t}}$$

で定義する. このとき, G は次の熱伝導方程式を満たすことを示せ.

$$G_t = \kappa \Delta G.$$