

練習問題 3 (応用解析第 1)

- 1 任意の自然数 n, m に対して、次式が成り立つことを示せ.

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \sin mx \, dx = 0$$
$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \pi \delta_{nm}$$

ただし、 δ_{nm} は Kronecker のデルタである.

- 2 $f(x)$ を区分的に連続な 2π -周期関数とし、 a_n, b_n を $f(x)$ の Fourier 係数とする. すなわち、

$$\begin{cases} a_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx, & n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx, & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

このとき任意の実数 α に対して、Fourier 係数 a_n, b_n は次のようにも表わせることを示せ.

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \cos nx \, dx, & n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \sin nx \, dx, & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$