練習問題４ (数学３Ｂ)

1 以下で定められる関数 f が区間 I で一様連続であるかどうかを判定せよ．

(1) $f(x) = \sin\frac{1}{x}, \quad I = (0, \infty)$

(2) $f(x) = x\sin\frac{1}{x}, \quad I = (0, 1]$

(3) $f(x) = x^2, \quad I = [0, \infty)$

2 非負整数 n に対して，$J_n := \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ とおく．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2} \ \ (n \geq 2)$ が成り立つことを示せ．

(2) J_n を求めよ．

(3) $J_{2n+1} < J_{2n} < J_{2n-1} \ \ (n \geq 1)$ が成り立つことを示し，(2) の結果を用いて次の Wallis（ウォリス）の公式 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \sqrt{\pi}$ を証明せよ．