練習問題 3 (関数方程式概論) May 14, 2020 (Thu.)

$\boxed{1}$ 3 次元空間をみたしている流体の速度場 $v(x,t) = (v_1(x,t), v_2(x,t), v_3(x,t))$ $(x = (x_1, x_2, x_3),\ t \geq 0)$ が与えられているとする．また，時刻 $t = 0$ において位置 $x = \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ にいた流体粒子が速度場 v に沿って流れるとき，その流体粒子の時刻 t における位置を $x = \varphi(\xi,t) = (\varphi_1(\xi,t), \varphi_2(\xi,t), \varphi_3(\xi,t))$ とする．さらに，各 φ_i $(i = 1,2,3)$ は滑らかな関数であると仮定し，t を固定し ξ の関数と見なしたときの $\varphi(\xi,t)$ の Jacobian を $J(\xi,t)$ とする．すなわち，$J(\xi,t) := \det\left(\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)}{\partial(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}\right)$．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\varphi(\xi,t)$ がみたすべき式を速度場 v を用いて書き下せ．

(2) $\frac{\partial}{\partial t}J(\xi,t) = J(\xi,t)(\nabla\cdot v)(\varphi(\xi,t),t)$ が成り立つことを示せ．