

1 以下の $u = u(x)$ に対する 2 階常微分方程式の一般解を求めよ.

$$(1) \quad x^2 \frac{d^2 u}{dx^2} - 5x \frac{du}{dx} + 9u = 0$$

$$(2) \quad (x^2 + 1) \frac{d^2 u}{dx^2} - x \frac{du}{dx} + u = 0$$

2 $f = f(x, y)$ を \mathbf{R}^2 上で定義された C^2 -級関数, (r, θ) を極座標系, すなわち $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ とし, 関数 $f = f(x, y)$ を極座標系で表したものを $F(r, \theta) := f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ とする. このとき次式が成り立つことを証明せよ.

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \Big|_{(x,y)=(r \cos \theta, r \sin \theta)} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r, \theta)$$